CLUB DE FÍSICA
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

Principi d'Incertesa de Heisenberg: Prova del producte escalar no commutatiu?

Pot mostrar-nos la mecànica quàntica falles en les nostres assumpcions matemàtiques?

Projecte del "Club de Física"

Autor:
Hector Solé Martínez

23 de Novembre de 2025

Plantejament del problema

El Principi d'Incertesa de Heisenberg és un dels problemes més controversials de la física.

Aquest ens diu que no podem conéixer la posició i la velocitat d'una partícula (amb efectes mecano-quàntics) a la vegada. De manera més formal;

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1.1}$$

Aquesta expressió es pot demostrar de moltes maneres, com per exemple, amb la desigualtat Cauchy–Schwarz tal i com es mostra en [2].

A part de les múltiples implicacions que pot tenir (1.1), ens pot fer replantejar conceptes matemàtics que fem servir molt que poden tenir connotacions diferents a les que estem normalment acostumats a fer servir.

En concret, el que explorarem en aquest apartat serà; **És el Principi d'Incertesa de Heisenberg una conseqüència de que el procute escalar no és commutatiu?**.

No és pas una assumpció trivial, ja que estarem extrapolant un principi fonamental de la mecànica quàntica amb una de les eines més bàsiques de l'àlgebra.

El producte escalar: Commuta?

El producte escalar és una aplicació

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$
$$(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle$$

tal que per a tots els vectors $u, v, w \in V$ i per a uns escalars qualsevols $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ es compleix que:

1. $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$
2. $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle + \beta\langle v,w\rangle$
3. $\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \overline{\alpha}\langle u,v\rangle + \overline{\beta}\langle u,w\rangle$
4. $\langle u,u\rangle \geq 0 \quad \text{i} \quad \langle u,u\rangle = 0 \iff u = 0$

Demostracions:

1. **Conjugada simetria**: La raó fonamental és que la norma al quadrat sigui un nombre real no negatiu:

$$\langle u,u\rangle = |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2 \geq 0$$

Això seria impossible sense el conjugat, ja que per a un nombre complex $z = a + bi$:

- $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$ (nombre real ≥ 0)
- $z^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ (nombre complex en general)

Si prenem $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ amb $u_k, v_k \in \mathbb{C}$, aleshores:

$$\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i} \tag{2.1}$$

Finalment, demostrem la conjugada simetria:

$$\overline{\langle v,u\rangle} = \overline{\sum_{i=1}^{n} v_i \overline{u_i}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i} u_i = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i} = \langle u,v\rangle$$

2. **Linealitat en el primer argument**:

$$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\alpha u_i + \beta v_i)\overline{w_i} = \alpha \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{w_i} + \beta \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{w_i} = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$$

3. **Antilinealitat en el segon argument**:

$$\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{(\alpha v_i + \beta w_i)} = \sum_{i=1}^{n} u_i (\overline{\alpha v_i} + \overline{\beta} \overline{w_i}) = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle + \overline{\beta} \langle u, w \rangle$$

4. **Positivitat**: Demostrat en l'apartat 1.

Podem analitzar si el producte escalar commuta amb ell mateix:
Sigui $z = \langle u, v \rangle \in \mathbb{C}$. Aleshores:

$$[z, z] = z \cdot z - z \cdot z = 0$$

És a dir, com a nombres complexos, $\langle u, v \rangle$ **sí que commuta** amb si mateix, ja que la multiplicació de nombres complexos és commutativa.

Quin és doncs, el problema amb el que ens estem trobant? Té sentit pensar que el principi d'incertesa de Heisenberg és una "prova"que el producte escalar és no commutatiu?

Cal diferenciar dos nivells de commutativitat:

- **Nivell 1**: El producte escalar com a **operació entre vectors**:

$$\langle u, v \rangle \neq \langle v, u \rangle \quad \text{(NO commuta)}$$

- **Nivell 2**: El producte dels **resultats numèrics**:

$$z \cdot w = w \cdot z \quad \text{(SÍ commuta)}$$

Definim l'aplicació:

$$f : V \times V \to \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

És trivial veure que $f(u, v) \neq f(v, u)$, pel que **no commuta** en el sentit de l'operació entre vectors.

Aleshores, sí que ens està donant una pista el principi d'incertesa de Heisenberg que, aplicat a una funció, el producte escalar és **no commutatiu**.

El Principi d'Incertesa de Heisenberg

Com ja hem dit, (1.1) es pot demostrar de moltes maneres, però fonamentalment cal veure què és aquesta fòrmula i com es desenvolupa.

Fent al·lusió un altre cop a [2], cada observable té associat un operador, el qual és nomenat lineal, però en la mecànica quàntica és necessari que tal operador sigui **hermític**. La definició formal és:

Sigui V un espai de Hilbert complex amb producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Un operador lineal $\hat{A} : V \to V$ es diu **hermític** (o autoadjoint) si satisfà:

$$\langle \psi, \hat{A}\phi \rangle = \langle \hat{A}\psi, \phi \rangle \quad \text{per a tots } \psi, \phi \in V$$

Equivalentment, $\hat{A}$ és hermític si coincideix amb el seu **operador adjunt**:

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A}$$

on l'operador adjunt $\hat{A}^\dagger$ es defineix per la relació:

$$\langle \psi, \hat{A}\phi \rangle = \langle \hat{A}^\dagger\psi, \phi \rangle \quad \forall \psi, \phi \in V$$

I també tenim la condició d'hermiticitat que diu que es compleix en $\mathbb{C}^n$ que, en dimensió finita, $\hat{A}$ és hermític si la seva matriu A compleix:

$$A = A^\dagger$$

És a dir, $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$

Demostració de la condició d'hermiticitat en $\mathbb{C}^n$

Treballem en $\mathbb{C}^n$ amb el producte escalar estàndard:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{v_k}$$

Un operador lineal $\hat{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es pot representar mitjançant una matriu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ on:

$$(\hat{A}v)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} v_j$$

La matriu adjunta $A^\dagger$ es defineix com la transposada conjugada:

$$A^\dagger = \overline{A}^T \quad \Rightarrow \quad (A^\dagger)_{ij} = \overline{A_{ji}}$$

Part 1: (⇒) Si $\hat{A}$ és hermític, aleshores $A = A^\dagger$

Siguin e_i i e_j vectors de la base canònica:

- $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ amb 1 a la posició i
- $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ amb 1 a la posició j

Per l'hermiticitat de $\hat{A}$:

$$\langle e_i, \hat{A}e_j \rangle = \langle \hat{A}e_i, e_j \rangle$$

Calculem cada costat:

Costat esquerra:

$$\langle e_i, \hat{A}e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} (e_i)_k \overline{(\hat{A}e_j)_k} = \overline{(\hat{A}e_j)_i} = \overline{A_{ij}}$$

(ja que $(e_i)_k = \delta_{ik}$ i $(\hat{A}e_j)_k = \sum_{l=1}^{n} A_{kl}(e_j)_l = A_{kj}$)

Costat dret:

$$\langle \hat{A}e_i, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} (\hat{A}e_i)_k \overline{(e_j)_k} = (\hat{A}e_i)_j = A_{ji}$$

(ja que $(\hat{A}e_i)_k = \sum_{l=1}^{n} A_{kl}(e_i)_l = A_{ki}$ i $\overline{(e_j)_k} = \delta_{jk}$)

Igualant els dos resultats:

$$\overline{A_{ij}} = A_{ji} \quad \Rightarrow \quad A_{ji} = \overline{A_{ij}}$$

Això és equivalent a $A = A^\dagger$.

Part 2: ($\Leftarrow$) Si $A = A^\dagger$, aleshores $\hat{A}$ és hermític

Siguin $u, v \in \mathbb{C}^n$ arbitraris. Volem demostrar que:

$$\langle u, \hat{A}v \rangle = \langle \hat{A}u, v \rangle$$

Desenvolupem el costat esquerra:

$$\langle u, \hat{A}v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{(\hat{A}v)_i} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} v_j \right)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i \overline{A_{ij}} \overline{v_j}$$

Desenvolupem el costat dret:

$$\langle \hat{A}u, v \rangle = \sum_{j=1}^{n} (\hat{A}u)_j \overline{v_j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ji} u_i \right) \overline{v_j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} u_i \overline{v_j}$$

Però per hipòtesi $A = A^\dagger$, és a dir $A_{ji} = \overline{A_{ij}}$, aleshores:

$$\langle \hat{A}u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{A_{ij}} u_i \overline{v_j} = \langle u, \hat{A}v \rangle$$

Hem demostrat que en $\mathbb{C}^n$:

$$\hat{A} \text{ és hermític} \quad \Leftrightarrow \quad A = A^\dagger \quad \Leftrightarrow \quad A_{ij} = \overline{A_{ji}} \quad \forall i, j$$

Aquesta condició garanteix que els valors propis siguin reals i que els vectors propis corresponents a valors propis diferents siguin ortogonals.

$$\boxed{A = A^\dagger}$$

Producte escalar i el Principi d'Incertesa de Heisenberg

Aleshores, tenim que $A = A^\dagger$ que vol dir que $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$.

Podem veure que els operadors de la mecànica quàntica, doncs, compleixen la mateixa condició que el producte escalar:

$$A_{ij} = \overline{A_{ji}} \quad \leftrightarrow \quad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

És una analogia que podem extrapolar les propietats ja estudiades del producte escalar als operadors, pel que **l'operador hermític serà commutatiu amb ell mateix però no té perquè ser-ho quan s'aplica a una funció!**

Això és, exactament, el que estem fent quan demostrem el Principi d'Incertesa de Heisenberg amb els operadors de la posició i el moment lineal, pel que aquest ens està donant una insinuació d'aquesta propietat del producte escalar fent ús d'un tipus d'espais molt característics tal i com són els espais de Hilbert.

Fem, doncs, una deducció del Principi d'Incertesa de Heisenberg a partir dels operadors posició i moment lineal.

Principi d'Incertesa de Heisenberg amb operadors $\hat{x}$ i $\hat{p}$

Recordem que cada operador té una desviació estandard associada a partir dels valors propis de la seva diagonalització, el qual determinarà si el nostre observable està ben definit o no;

La desviació estàndard ΔA es defineix com:

$$\Delta A = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(A_i - \langle A\rangle)^2}$$

Que és equivalent a:

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2} = \sigma_A$$

I el valor de la dispersió de mesures de dos observables té l'expressió;

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\rangle\right| \tag{5.1}$$

Que molt convenientment es dedueix a partir de la desigualtat de Cauchy-Schwarz [2].

Valor de la dispersió de mesures de dos observables

Recordem que el valor esperable d'un operador és;

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

I a més, definirem uns operadors çentrats"(que representen el la desviació del valor mitjà);

$$\hat{A}_0 = \hat{A} - \langle A\rangle \quad \hat{B}_0 = \hat{B} - \langle B\rangle$$

Ara fem servir la desigualtat de Cauchy-Schwarz;

$$|\langle u|v\rangle|^2 \leq \langle u|u\rangle \cdot \langle v|v\rangle$$

On farem servir $|u\rangle = \hat{A}_0|\psi\rangle$ i $|v\rangle = \hat{B}_0|\psi\rangle$

$$|\langle\psi|\hat{A}_0\hat{B}_0|\psi\rangle|^2 \leq \langle\psi|\hat{A}_0^2|\psi\rangle \cdot \langle\psi|\hat{B}_0^2|\psi\rangle$$

Però $\langle\psi|\hat{A}_0^2|\psi\rangle = (\Delta A)^2$, $\langle\psi|\hat{B}_0^2|\psi\rangle = (\Delta B)^2$ i $|\langle\psi|\hat{A}_0\hat{B}_0|\psi\rangle|^2 = |\langle\hat{A}_0\hat{B}_0\rangle|^2$, pel que ens resulta;

$$|\langle\hat{A}_0\hat{B}_0\rangle|^2 \leq (\Delta A)^2 \cdot (\Delta B)^2$$

Pel que tenim que:

$$|\langle\hat{A}_0\hat{B}_0\rangle| \leq (\Delta A) \cdot (\Delta B) \tag{5.2}$$

D'altra manera, podem desenvolupar l'expressió de $\hat{A}_0\hat{B}_0$, desenvolupant en dues parts, una amb commutador i l'altra amb anticommutador;

$$\hat{A}_0\hat{B}_0 = \frac{1}{2}\,[\hat{A}_0, \hat{B}_0] + \frac{1}{2}\{\hat{A}_0, \hat{B}_0\}$$

on:

- $[\hat{A}_0, \hat{B}_0] = \hat{A}_0\hat{B}_0 - \hat{B}_0\hat{A}_0$ (commutador)
- $\{\hat{A}_0, \hat{B}_0\} = \hat{A}_0\hat{B}_0 + \hat{B}_0\hat{A}_0$ (anticommutador)

Propietats clau:

- El **commutador** d'operadors hermítics és **antihermític**: $[\hat{A}_0, \hat{B}_0]^\dagger = -[\hat{A}_0, \hat{B}_0]$ $\rightarrow$ Els seus valors esperats són **imaginaris purs**
- L'**anticommutador** d'operadors hermítics és **hermític** $\rightarrow$ Els seus valors esperats són **reals**

Amb això, podem buscar el valor esperat;

$$\langle\hat{A}_0\hat{B}_0\rangle = \frac{1}{2}\langle[\hat{A}_0, \hat{B}_0]\rangle + \frac{1}{2}\langle\{\hat{A}_0, \hat{B}_0\}\rangle$$

Fem el quadrat per tenir l'expressió que volem:

$$|\langle\hat{A}_0\hat{B}_0\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left(|\langle[\hat{A}_0, \hat{B}_0]\rangle|^2 + |\langle\{\hat{A}_0, \hat{B}_0\}\rangle|^2\right)^{*}$$

*Ens queda aquesta expressió ja que els Imaginaris i els Reals són ortogonals.

Ara agafem una cota inferior, de manera que només apreciarem els nombres imaginaris dins d'aquesta igualtat ja que, se **segueix complint la desigualtat** que estem estudiant i, a més, conté la part imaginària que ens interessa a l'hora d'evaluar els operadors, puix que ja hem vist que en $\mathbb{R}$ el producte escalar és commutatiu en qualsevol cas, pel que en termes d'operadors haurà de ser de la mateixa manera.

Així doncs, podem escriure:

$$|\langle \hat{A}_0 \hat{B}_0 \rangle|^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{A}_0, \hat{B}_0] \rangle|^2$$

$$|\langle \hat{A}_0 \hat{B}_0 \rangle| \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^{\dagger} \tag{5.3}$$

Finalment, juntant (5.2) i (5.3), obtenim l'expressió final (5.1);

$$\boxed{\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|}$$

Desenvolupament del Principi d'Incertesa de Heisenberg

Fem servir, doncs, (3) per a obtenir una expressió del valor de la dispersió de les mesures dels observables posició ($\hat{x}$) i moment lineal ($\hat{p}$):

Definim els operadors $\hat{x}$ i $\hat{p}$ (en una dimensió):

$$\hat{x} = x \quad \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

Fem el commutador aplicat a una funció qualsevol depenent d'x:

$$[\hat{x}, \hat{p}]\, f = x \cdot -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} f - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot x \cdot f = -i\hbar x \frac{\partial f}{\partial x} + i\hbar \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + f \right) = i\hbar f$$

És a dir;

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \hat{1}$$

† Notem que $\langle [\hat{A}_0, \hat{B}_0] \rangle = \langle [\hat{A} - \langle A \rangle, \hat{B} - \langle B \rangle] \rangle = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle)(\hat{B} - \langle B \rangle) - (\hat{B} - \langle B \rangle)(\hat{A} - \langle A \rangle) \rangle = \langle \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \rangle = \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle$

Ara, calculem el valor esperable:

$$\langle[\hat{x},\hat{p}]\rangle = \frac{\langle\psi|i\hbar\hat{1}|\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{\dagger}(i\hbar)\psi dx}{\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{\dagger}\psi dx} = i\hbar^{\ddagger}$$

I finalment:

$$|i\hbar| = \hbar$$

Pel que ens queda:

$$\boxed{\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Que és exactament el **Principi d'Incertesa de Heisenberg**.

‡Hem pres la funció ψ com una funció ja normalitzada, tot i que no afectaria al resultat puix que les integrals quedarien igual al denominador i numerador a causa de que $i\hbar$ és una constant.

Conclusions Finals i reflexió

Finalment, hem pogut veure com el Principi d'Incertesa de Heisenberg ens dona una idea de que, efectivament, el producte escalar no es commutatiu a través de la relació que tenen els operadors hermítics i el producte escalar d'un espai finit en els complexos.

Això ens deriva a que una relació tan bàsica com conéixer que el producte escalar en $\mathbb{C}^n$ no commuta es veu reflectit a escales que ens afecta a l'hora, per exemple, d'obtenir la desviació en la mesura d'un observable.

Quan Werner Heisenberg va arribar a la deducció del principi que ara porta el seu nom en la mecànica quàntica, ell va fer-ho amb una forma matricial, igual de correcta que la empleada en aquest *paperillo*, però el transfons que té és molt major al que es va contemplar en un principi.

La mecànica quàntica estava en el seu punt més criticat, com a teoria que no agradaba ni tan sols al major exponent de la ciència de l'època, Albert Einstein, però era, indiscutiblement, massa bona a l'hora de descriure el que es veia al laboratori.

Potser el seu odi va estar justificat. Al cap i a la fi, el primer instint cap a lo desconegut és el rebuig, fins i tot en àmbits com la ciència, però aquestes relacions tenen un caire més profund.

La realitat que ens envolta té una manera de ser encara molt desconeguda per a nosaltres, però, fins i tot en les seves relacions més difícils i abstractes com pot ser la mecànica quàntica ens recorda que la resposta, moltes vegades, ja l'hem aconseguida i l'hem passat per alt, tot i que les fòrmules que obtinguem ens ho estiguin cridant a pulmó viu, tal i com ha estat el cas.

Inevitablement queda molt per estudiar sobre la mecànica quàntica, però pensar que és només la reformulació de les relacions bàsiques que ja coneixem pot fer una branca de la física més fàcil d'explicar i accessible per a tothom interessat.

Bibliografia

[1] National Consiglio et al. El principio de incertidumbre de heisenberg. `https://iftucr.org/IFT/Heisenberg_files/Heisenberg_espanÌČol.pdf`, 2024. Consultado: 23/11/2025.

[2] Roger Garcia Sirerol. Derivació formal del principi d'incertesa de heisenberg mitjançant la desigualtat de cauchy–schwarz, 2025. Manuscrit no publicat.

[3] H. P. Robertson. The uncertainty principle. *Physical Review*, 34(1):163–164, July 1929.