



CLUB DE FÍSICA
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

Quatre Derivacions de les Transformacions de Lorentz

Projecte del "Club de Física"

Autor:
Alejandro de la Cruz Foz

21 de desembre de 2025

Índex

Introducció	2
Postulats i Suposicions	3
0.1 Primer Postulat	3
0.2 Segon Postulat	3
0.3 Configuració Estàndard	3
1 1. Fronts d'Ona Esfèrics	4
2 2. Geometria Hiperbòlica (Derivació de Landau-Lifshitz)	6
3 3. Constants d'Acoblament (Derivació d'Einstein)	8
4 4. Dilatació i Contracció	10

Introducció

A continuació hi han quatre derivacions diferents de les transformacions de Lorentz que combinen principis tant físics com matemàtics. No tenen cap ordre específic i totes són de nivells de dificultat comparable: només varia el plantejament inicial, i passat un cert punt són totes (gairebé) idèntiques. S'han triat aquestes quatre en concret perquè són prou simples i ofereixen perspectives i estratègies completament diferents a l'hora d'abordar la mateixa qüestió.

L'objectiu és oferir diferents derivacions per qui vulgui entendre millor el que s'ha fet a classe o simplement tingui curiositat per quines altres maneres hi han de resoldre el problema —personalment no em va agradar gens la demostració de la vara feta a classe on es parteix de ja conèixer γ , i trobo que hi han moltes altres derivacions molt més entenedores. En concret, les derivacions 1 i 3 venen del desenvolupament original d'Einstein de principis del s. XX ([1]) mentre que la segona ve d'un llibre de text dels anys 70 (el reconegut Landau-Lifshitz, [2]) i la última pertany a un paper breu de 2007 ([3]). Cal destacar que la derivació 3 està força adaptada, ja que el llibre original utilitza la contracció de longituds i simultaneïtat d'esdeveniments en comptes de l'interval espai-temps.

Menys en la última derivacions, *no es partirà de les definicions de β i γ* , sinó que aquests factors apareixeran al llarg del treball quan sigui necessari. Tot i que s'arribi a resultats lleugerament diferents (i, en el cas de les derivacions 1 i 3, no calgui definir β), sempre seran expressions equivalents amb procediments igual de vàlids.

Postulats i Suposicions

Partirem de dos postulats simples. Poden ser lleugerament diferents als vists a classe però són equivalents:

0.1. Primer Postulat

Les lleis de la física (i per tant les constant fonamentals com c) són les mateixes per tots els sistemes de referència inercials

A nivell matemàtic, el primer postulat implica que les transformacions de Lorentz seran transformacions *lineals*, és a dir, que sempre preservaran l'origen i l'estructura del nostre espai (mireu els vostres apunts d'àlgebra per una definició en més detall). A efectes pràctics, això vol dir que podrem escriure la transformació que busquem com a matriu.

0.2. Segon Postulat

Per qualsevol dos esdeveniments, l'interval espai-temps $ds^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ que els separa és invariant respecte canvis de sistema de referència inercial.

Com només considerarem moviment en una dimensió, es simplifica al següent:

$$-(ct)^2 + x^2 = -(ct')^2 + (x')^2$$

Perquè es trien aquests dos postulats en concret pot semblar arbitrari, però estan fonamentats en tant resultats experimentals com models teòrics i principis de la física, i el comentari i discussió d'aquests postulats es desenvoluparà en un futur paperillo.

0.3. Configuració Estàndard

Considerarem sempre el mateix sistema, anomenat la *configuració estàndard*. Tindrem dos sistemes de referència:

- \mathcal{O} , en repòs.
- \mathcal{O}' , movent-se a una velocitat constant v respecte \mathcal{O} en la direcció x positiva.

Imposarem també coincideixin a l'origen: $(t = 0, x = 0) = (t' = 0, x' = 0)$. A partir d'aquí sabem que l'origen de \mathcal{O}' tindrà $x' = 0$ i $x = vt$, el qual serà una propietat molt important per les derivacions.

1. Fronts d'Ona Esfèrics

Considerem una senyal de llum que es propaga de manera esfèrica desde l'origen comú de \mathcal{O} i \mathcal{O}' . Com que la velocitat de la llum és la mateixa en tots els sistemes de referència, per qualsevol punt P en aquest front d'ona tenim:

$$\begin{aligned}r &= ct \\ r' &= ct'\end{aligned}$$

Segons l'equació d'una esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = (ct)^2 \quad (1.1)$$

Similarment, com a \mathcal{O}' tenim $y' = y$, $z' = z$:

$$(x')^2 + y^2 + z^2 = (ct')^2 \quad (1.2)$$

Sabent que la nostra transformació ha de ser lineal, podem escriure x' de la següent manera:

$$x' = ax + bt$$

I recordem també que a l'origen de \mathcal{O}' tenim $x' = 0$, $x = vt$:

$$0 = avt + bt \Rightarrow -av = b$$

Si substituïm a l'expressió anterior per x' obtenim:

$$x' = a(x - vt)$$

Adonem-nos que la transformació inversa canviarà els sistemes i tindrà $v' = -v$:

$$x = a(x' + vt')$$

Substituïm aquí l'expressió de x i desenvolupem per aïllar t' :

$$\begin{aligned}x &= a\left(a(x - vt) + vt'\right) \\ \frac{x}{va} - \frac{ax}{v} + at &= t' \\ \frac{(1 - a^2)x}{av} + at &= t'\end{aligned}$$

Ara substituïm x' i t' dins de 1.2 per comparar amb 1.1:

$$\begin{aligned}a^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 &= c^2 \left(\frac{(1 - a^2)x}{av} + at \right)^2 \\ \left(a^2 - \frac{c^2(1 - a^2)}{a^2v^2} \right) x^2 + y^2 + z^2 &= \left(2a^2v + \frac{2c^2(1 - a^2)xt}{v} \right) xt + (c^2a^2 - a^2v^2)t^2\end{aligned}$$

D'aquí obtenim tres expressions equivalents:

$$\begin{aligned}a^2 - \frac{c^2(1 - a^2)}{a^2v^2} &= 1 \\2a^2v + \frac{2c^2(1 - a^2)xt}{v} &= 0 \\c^2a^2 - a^2v^2 &= 1\end{aligned}$$

Com és la més simple, triem la tercera:

$$\begin{aligned}a^2(c^2 - v^2) &= 1 \\a &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

Hem arribat al factor gamma, de manera que podem substituir dins l'expressió de t' i simplificar:

$$\begin{aligned}t' &= \frac{1 - \gamma^2}{\gamma v}x + \gamma t \\&= -\frac{v^2\gamma^2}{c^2\gamma v}x + \gamma t \\&= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\end{aligned}$$

De manera que el resultat final és:

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\x' &= \gamma(x - vt) \\t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\end{aligned}}$$

2. Geometria Hiperbòlica (Derivació de Landau-Lifshitz)

Recordem que la nostra transformació ha de ser lineal i conservar l'interval espai-temps. Per la forma de l'interval, sabrem que hi haurà certa relació amb geometria hiperbòlica: $ds^2 = -(ct)^2 + x^2$ correspon exactament amb l'equació d'una hipèrbola rectangular (és a dir, amb asíptotes perpendiculars i amb el vèrtex i covèrtex iguals) de vèrtex a : $a^2 = -x^2 + y^2$.

Comparem-ho amb la geometria euclidiana que coneixem: les distàncies de l'origen venen donades per $l^2 = x^2 + y^2$, el qual correspon a una circumferència de radi l . En l'espai euclidià, l'aplicació lineal que conserva les distàncies és la matriu de rotació:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Per tant, per conservar distàncies en un espai-temps hiperbòlic voldrem buscar una mena de "matriu de rotació hiperbòlica" en funció d'un paràmetre que anomenarem Ψ —aquest s'anomena la *rapiditat*. Anomenem a aquesta matriu $[L]$.

Així doncs, partim de tres relacions importants a geometria hiperbòlica:

$$\cosh^2 \Psi - \sinh^2 \Psi = 1 \tag{2.1}$$

$$\sinh \Psi = \frac{\tanh \Psi}{\sqrt{1 - \tanh^2 \Psi}} \tag{2.2}$$

$$\cosh \Psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \Psi}} \tag{2.3}$$

I hem vist abans que necessàriament tenim:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = [L] \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Desenvolupant arribem a:

$$\begin{aligned} ct' &= L_{00}ct + L_{01}x \\ x' &= L_{10}ct + L_{11}x \end{aligned}$$

Ara substituïnt d'acord amb el segon postulat:

$$\begin{aligned} -(ct)^2 + x^2 &= -(L_{00}ct + L_{01}x)^2 + (L_{10}ct + L_{11}x)^2 \\ &= -(L_{00}^2 - L_{10}^2)(ct)^2 + (L_{11}^2 - L_{01}^2)x^2 + (-L_{00}L_{01} + L_{10}L_{11})ctx \end{aligned}$$

Comparant els coeficients tenim:

$$\begin{aligned} L_{00}^2 - L_{10}^2 &= 1 \\ -L_{00}L_{01} + L_{10}L_{11} &= 0 \\ L_{11}^2 - L_{01}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Fem un Ansatz: recordant 2.1, suposem $L_{00} = L_{11} = \cosh \Psi$, $L_{01} = L_{10} = \pm \sinh \Psi$ perquè es compleixin la primera i la tercera equació. Si analitzem la segona veiem que tenim:

$$\mp \cosh \Psi \sinh \Psi \pm \cosh \Psi \sinh \Psi = 0$$

El qual es compleix sempre, de manera que hem trobat una solució pel sistema i només cal determinar el signe de L_{01} i L_{10} . Recordem que hem definit que \mathcal{O}' es mou amb velocitat positiva en la direcció x positiva respecte \mathcal{O} . Aplicant el fet que en \mathcal{O}' tenim $x' = 0$ podem arribar a una expressió per v , la qual imposarem que sigui positiva:

$$\begin{aligned} x' &= \pm \sinh \Psi ct + \cosh \Psi x = 0 \\ \pm \sinh \Psi ct &= -\cosh \Psi x \\ \mp \sinh \Psi ct &= \cosh \Psi x \\ \mp \tanh \Psi &= \frac{x}{ct} = \frac{v}{c} \end{aligned}$$

Aquí, perquè es compleixi $\mp \tanh \Psi > 0$ hem de triar $L_{01} = L_{10} = -\sinh \Psi$, ja que el terme $\sinh \Psi$ té signe oposat al terme $\tanh \Psi$. D'aquesta manera arribem a:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \Psi & -\sinh \Psi \\ -\sinh \Psi & \cosh \Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Si ara apliquem 2.3 i 2.2 podem obtenir equacions més explícites. Definint $\tanh \Psi = \frac{v}{c} \equiv \beta$:

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}(ct)^2 + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}t - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{x}{c} \end{aligned}$$

Per comoditat, definim $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ i treiem factor comú, arribant així al resultat final:

$$\boxed{\begin{aligned} \beta &\equiv \frac{v}{c} \\ \gamma &\equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{aligned}}$$

3. Constants d'Acoblament (Derivació d'Einstein)

Per un raig de llum movent-se en la direcció x positiva tenim $x = ct$, de manera que pel segon postulat a qualsevol sistema de referència es complirà també $x' = ct'$. Si reescrivim les equacions com a $x - ct = 0$ i $x' - ct' = 0$ ens adonem que podem reescriure aquesta relació com a:

$$x - ct = \lambda(x' - ct')$$

Ja que $0 = k \cdot 0$. Si similarment considerem llum propagant-se en la direcció oposada (velocitat $-c$) obtenim una equació semblant:

$$x' + ct' = \mu(x + ct)$$

Podem obtenir un sistema més simple si sumem i restem aquestes dues equacions. Començant per la suma:

$$\begin{aligned}(x' - ct') + (x' + ct') &= \lambda(x - ct) + \mu(x - ct) \\ 2x' &= (\lambda + \mu)x - (\lambda - \mu)ct \\ x' &= \frac{\lambda + \mu}{2}x - \frac{\lambda - \mu}{2}ct\end{aligned}$$

Per la resta tenim:

$$\begin{aligned}(x' - ct') - (x' + ct') &= \lambda(x - ct) - \mu(x + ct) \\ -2ct' &= (\lambda - \mu)x - (\lambda + \mu)ct \\ ct' &= \frac{\lambda + \mu}{2}ct - \frac{\lambda - \mu}{2}x\end{aligned}$$

Per simplificar, ara definim:

$$\begin{aligned}a &\equiv \frac{\lambda + \mu}{2} \\ b &\equiv \frac{\lambda - \mu}{2}\end{aligned}$$

De manera que queda:

$$\begin{aligned}x' &= ax - bct \\ ct' &= act - bx\end{aligned}$$

Recordant que a l'origen de \mathcal{O}' tenim $x' = 0$ i que $v = \frac{x}{t}$:

$$0 = ax - bct \Rightarrow bct = ax \Rightarrow \frac{bc}{a} = v$$

Així doncs, podem reescriure b com a $\frac{av}{c}$:

$$x' = a(x - vt) \quad (3.1)$$

$$ct' = a \left(ct - \frac{v}{c}x \right) \quad (3.2)$$

A la derivació original d'Einstein aquesta última part es fa a partir de contraccions de longitud, pero és confusa i parteix de ja conèixer l'expressió per γ . Per fer-ho més simple, busquem a imposant la invariància de l'interval espai-temps:

$$\begin{aligned} -(ct)^2 + x^2 &= -a^2 \left(ct - \frac{v}{c}x \right)^2 + a^2(x - vt)^2 \\ &= -a^2 \left((ct)^2 - 2tvx + \frac{v^2}{c^2}x^2 \right) + a^2(x^2 - 2xvt + v^2t^2) \\ &= -a^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (ct)^2 + a^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x^2 \end{aligned}$$

Comparant els coeficients tenim dues maneres d'arribar a la mateixa equació:

$$1 = a^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

La qual es resol immediatament i dóna el factor gamma:

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma$$

A partir d'aquí, arribem al resultat final substituïnt aquesta expressió dins de 3.1 i 3.2:

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \end{aligned}}$$

4. Dilatació i Contracció

Aquesta derivació és la més breu però requereix saber prèviament la definició de γ .

Partim també de conèixer la contraccions de distàncies i la dilatació del temps:

- Una vara de longitud pròpia L_0 que està en repòs respecte el sistema \mathcal{O}' té una longitud $L = \frac{L_0}{\gamma}$ vista des del sistema \mathcal{O} .
- Per un x' fix, Dos esdeveniments amb una diferència de temps Δt al sistema \mathcal{O}' tindran una diferència de temps per \mathcal{O} donada per $\Delta t = \gamma \Delta t'$.
- Definim el factor de contracció i dilatació com a $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Ara considerem el següent sistema: partint de la configuració estàndard, posem una vara de longitud L_0 a l'eix x tal que tingui un extrem a $x' = 0$ (seguint l'origen de \mathcal{O}') i l'altre a $x' = L_0$.

Adonem-nos que per \mathcal{O} , els dos extrems seran a $x = vt$ i a $x = vt + \frac{x'}{\gamma}$. Reordenant:

$$\frac{x'}{\gamma} = x - vt \Rightarrow x' = \gamma(x - vt)$$

Per trobar t' , recordem que per la transformació inversa només cal canviar els sistemes i el signe de la velocitat:

$$x = \gamma(x' + vt')$$

Substituint x' i desenvolupant:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(\gamma(x - vt) + vt') \\ &= \gamma^2(x - vt) + \gamma vt' \\ (1 - \gamma^2)x + \gamma^2 vt &= \gamma vt' \end{aligned}$$

Definint $\beta \equiv \frac{v}{c}$ i sabent que $1 - \gamma^2 = -\beta^2 \gamma^2$:

$$\begin{aligned} \gamma vt' &= -\beta^2 \gamma^2 x + \gamma^2 vt \\ t' &= -\frac{\beta^2 \gamma}{v} x + \gamma t \\ &= \gamma \left(t - \frac{\beta^2}{v} x \right) \end{aligned}$$

De manera que arribem al resultat final:

$$\begin{aligned}\beta &\equiv \frac{v}{c} \\ \gamma &\equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)\end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] Einstein, A. (1921). *Relativity: the special and general theory*.
- [2] Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. (1975). *The classical theory of fields: Volume 2*.
- [3] Lévy, J.-M. (2007). *A simple derivation of the Lorentz transformation and of the related velocity and acceleration formulae*.