CLUB DE FÍSICA
Universitat Autònoma de Barcelona

Derivació Formal del Principi d'Incertesa de Heisenberg mitjançant la Desigualtat de Cauchy-Schwarz

Desenvolupament rigorós del principi d'incertesa a partir dels fonaments axiomàtics de la mecànica quàntica i les propietats geomètriques dels productes escalars.

Projecte del "Club de Física"

Autor:
Roger Garcia Sirerol

19 de maig de 2025

Desigualtat de Cauchy–Schwarz

Sigui V un espai vectorial sobre el cos dels nombres reals o complexos, amb un producte escalar definit $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to R$ o C. Per a qualsevols vectors $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, la **desigualtat de Cauchy–Schwarz** estableix que:

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$$

On $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|$ és el producte intern o producte escalar, que en R^n és:

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| := \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i$$

El producte intern $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ estarà definit diferent en cada espai.

La norma $\| \cdot \|$ està definida a partir del producte intern com:

$$\|\mathbf{u}\| := \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

Equivalentment la desigualtat funciona al quadrat, de fet ve del quadrat però és més útil havent fet l'arrel als dos costats.

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2 \leq |\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle| \cdot |\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle|$$

Demostració

Per arribar al principi d'incertesa, necesitem veure en que es sustenta la mecànica quàntica i la definició d'espai de Hilbert, per tal de després veure com trobem el principi d'incertesa com un cas concret de la desigualtat amb uns vectors concrets.

Postulats fonamentals de la mecànica quàntica

La mecànica quàntica es fonamenta en quatre principis bàsics que defineixen l'estructura matemàtica dels sistemes físics i el seu comportament dinàmic:

- **Postulat 1: Espai d'estats.** A tot sistema físic li correspon un espai de Hilbert complex $\mathcal{H}$. L'estat del sistema es representa mitjançant un vector unitari $\psi \in \mathcal{H}$, és a dir, $\psi = 1$. Dues funcions d'ona que difereixen només en una fase global representen el mateix estat físic.

- **Postulat 2: Observables.** A cada magnitud física observable se li associa un operador lineal autoadjunt $\hat{A}$ sobre $\mathcal{H}$. Els valors propis reals de $\hat{A}$ representen els possibles resultats de les mesures d'aquesta magnitud.

- **Postulat 3: Mesura.** Si el sistema es troba en l'estat ψ, la probabilitat d'obtenir el valor propi a en una mesura de l'observable $\hat{A}$ és $|\phi_a \psi|^2$, on ϕ_a és un vector propi normalitzat associat a a. Immediatament després de la mesura, l'estat del sistema col·lapsa a ϕ_a.

- **Postulat 4: Evolució temporal.** L'evolució temporal d'un sistema aïllat està governada per l'equació de Schrödinger:

  $$i\hbar \frac{d}{dt}\psi(t) = \hat{H}\psi(t),$$

  on $\hat{H}$ és l'hamiltonià del sistema, un operador autoadjunt que representa l'energia total.

Espai de Hilbert

Per arribar al principi d'incertesa, necesitem veure com s'aplica la desigualtat a un espai de Hilbert, que podem definir així:

Un **espai de Hilbert** $\mathcal{H}$ és un espai vectorial complex dotat d'un producte escalar

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to C$$

que satisfà les propietats següents:

1. **Conjugació hermítica**: $\langle \psi | \phi \rangle = \overline{\langle \phi | \psi \rangle}$ per a tot $\psi, \phi \in \mathcal{H}$,

2. **Linealitat en el segon argument**: $\langle \psi | a\phi_1 + b\phi_2 \rangle = a\langle \psi | \phi_1 \rangle + b\langle \psi | \phi_2 \rangle$,

3. **Positivitat**: $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$, amb igualtat si i només si $\psi = 0$.

Aquest producte escalar defineix una norma per a cada vector:

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle},$$

i l'espai és **complet** respecte a aquesta norma, és a dir, tota successió de Cauchy de vectors de $\mathcal{H}$ convergeix a un límit dins de $\mathcal{H}$.

Ara doncs, anem a aplicar la desigualtat de Cauchy-Swarz en un espai de Hilbert, on els nostres vectors son $|\psi\rangle$ i $|\phi\rangle$ aleshores, tenim que la nostra inequació serà:

$$|\langle\psi|\phi\rangle|^2 \leq \langle\psi|\psi\rangle\langle\phi|\phi\rangle$$

Ara doncs, anem a veure com s'arriba amb això al principi d'incertesa.

Primer veient la definició de la incertesa d'un observable

La incertesa d'un observable

La incertesa ΔA d'un observable A en un estat quàntic $|\psi\rangle$ es defineix com la desviació esàndard respecte el valor esperat de A:

$$\Delta A = \sqrt{\psi(A - \langle A\rangle)^2\psi}.$$

On el valor esperat $\langle A\rangle$ és:

$$\langle A\rangle = \psi A\psi.$$

Com s'arriba doncs al principi d'incertesa

Els operadors posició $\hat{x}$ i moment $\hat{p}$ són:

$$\hat{x} = x\psi(x) \quad , \quad \hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)$$

Definim, en base als dos operadors els vectors següents:

$$|\phi_{\hat{x}}\rangle = (\hat{x} - \langle\hat{x}\rangle)|\psi\rangle \qquad |\phi_{\hat{p}}\rangle = (\hat{p} - \langle\hat{p}\rangle)|\psi\rangle$$

On recordem que:

$$\langle\hat{x}\rangle := \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, x\, \psi(x)\, dx$$

$$\langle\hat{x}\rangle := \text{esperança del valor de l'observable x a l'estat } |\psi\rangle$$

I clarament, igual per p, amb el canvi que l'operador en si és diferent:

$$\langle \hat{p} \rangle := \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = \langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) \psi(x) \, dx$$

Apliquem doncs als nostres dos vectors $|\phi_{\hat{x}}\rangle$ i $|\phi_{\hat{p}}\rangle$ la desigualtat de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle \phi_{\hat{x}} | \phi_{\hat{p}} \rangle|^2 \leq \langle \phi_{\hat{x}} | \phi_{\hat{x}} \rangle \langle \phi_{\hat{p}} | \phi_{\hat{p}} \rangle$$

Veiem ara que:

$$\langle \phi_{\hat{x}} | \phi_{\hat{x}} \rangle = (\Delta x)^2$$

$$\langle \phi_{\hat{x}} | \phi_{\hat{x}} \rangle = \langle \psi | (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^\dagger (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) | \psi \rangle = \langle \psi | ((\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle))^2 | \psi \rangle = (\Delta x)^2$$

I equivalentment per p

$$\langle \phi_{\hat{p}} | \phi_{\hat{p}} \rangle = (\Delta p)^2$$

Així doncs:

$$|\langle \phi_{\hat{x}} | \phi_{\hat{p}} \rangle|^2 \leq (\Delta x)^2 \cdot (\Delta p)^2$$

Aleshores, anem a veure que és el terme $|\langle \phi_{\hat{x}} | \phi_{\hat{p}} \rangle|^2$

Deducció formal de la relació de commutació $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

Considerem els operadors de posició i moment aplicats a una funció arbitraria $\psi(x)$:

$$\hat{x} = x\psi(x) \quad , \quad \hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)$$

El commutador entre dos operadors qualsevols és:

$$[A, B] = AB - BA$$

Així doncs, aplicat als nostrs operadors i a la nostra funció:

$$[\hat{x}, \hat{p}]\psi(x) = (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\psi(x)$$

Primer, calculem els dos termes per separat:

$$\hat{x}\hat{p}\psi(x) = \hat{x}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)\right) = -i\hbar x\frac{d}{dx}\psi(x)$$

$$\hat{p}\hat{x}\psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\left(x\psi(x)\right) = -i\hbar\left(\psi(x) + x\frac{d}{dx}\psi(x)\right)$$

Per tant, el commutador aplicat sobre $\psi(x)$ és:

$$[\hat{x}, \hat{p}]\psi(x) = \hat{x}\hat{p}\psi(x) - \hat{p}\hat{x}\psi(x) = \left(-i\hbar x\frac{d}{dx}\psi(x)\right) - \left(-i\hbar\left(\psi(x) + x\frac{d}{dx}\psi(x)\right)\right)$$

Els termes $i\hbar x\frac{d}{dx}\psi(x)$ s'ens cancelen i veiem que ens queda:

$$[\hat{x}, \hat{p}]\psi(x) = -i\hbar x\frac{d}{dx}\psi(x) + i\hbar x\frac{d}{dx}\psi(x) + i\hbar\psi(x) = i\hbar\psi(x)$$

$$[\hat{x}, \hat{p}]\psi(x) = i\hbar\psi(x)$$

Com que això és cert per a qualsevol funció $\psi(x)$, tenim la igualtat d'operadors:

$$\boxed{[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar}$$

Conclusions Finals

Bibliografia