CLUB DE FÍSICA
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

Força electromagnètica en la levitació de l'anell d'alumini

Plantejament i estudi físic i matemàtic

Projecte del "Club de Física"

Autor:
David Galan Franch

19 de maig de 2025

Resum

En aquest treball analitzem la levitació dels anells metàl·lics sota un camp magnètic altern. Primer considerem un model resistiu simple que prediu força mitjana nul·la, contradictòria amb l'experiment. Per això, introduïm l'autoinductància, que genera un desfasament entre fem i corrent, essencial per obtenir una força mitjana positiva que explica la levitació. També estudiem la dependència espacial de la inductància i resistència, i la dinàmica del moviment de l'anell, oferint un model matemàtic complet que reflecteix el fenomen real.

Introducció

La levitació i el salt dels anells metàl·lics sotmesos a camps magnètics alterns constitueixen un exemple paradigmàtic de la llei de Faraday–Lenz. A primera vista podria semblar que, en variar periòdicament tant el camp magnètic extern $B(t)$ com la corrent induïda $I(t)$, la força electromagnètica mitjana s'anul·la i, per tant, l'anell romandria en repòs. L'experiment, però, mostra el contrari: l'anell s'eleva i sovint surt projectat.

La raó fonamental és la **desincronització** (*desfasament*) entre la f.e.m. induïda i la corrent generada dins l'anell, un efecte inevitable quan es té en compte la seva autoinductància. Aquest desfasament trenca la **simetria** temporal i introdueix una component de força mitjana positiva capaç de vèncer la gravetat.

En aquest estudi desenvolupem models físics i matemàtics per entendre i quantificar aquest fenomen. Primer tractem un model simplificat on l'anell es considera una simple resistència, per a després introduir la inductància i les seves implicacions dinàmiques. Finalment, incorporem la dependència espacial i el moviment de l'anell per tal d'explicar completament la seva levitació.

Model simplificat: anell com a resistència pura (L=0)

En aquest apartat, considerem un model inicial i simplificat en què l'anell metàl·lic es tracta com un circuit resistiu pur, és a dir, sense inductància ($L = 0$). Aquest model és útil com a punt de partida per comprendre les limitacions d'una aproximació molt bàsica i per contrastar amb els resultats experimentals.

2.1. Descripció física i formulació

Suposem que la bobina genera un camp magnètic variable en el temps, d'intensitat:

$$B(t) = B_0 \sin(\omega t)$$

on B_0 és l'amplitud màxima del camp i $\omega = 2\pi f$ és la pulsació corresponent a la freqüència f del corrent altern.
Aquest camp magnètic genera un flux magnètic $\Phi(t)$ a través de l'anell conductor:

$$\Phi(t) = \mathcal{B} \sin(\omega t)$$

on $\mathcal{B}$ és el flux màxim a través de l'anell, que depèn tant de l'amplitud del camp com de la geometria de l'anell i la distribució espacial del camp. Segons la llei de Faraday, la fem induïda a l'anell és la taxa de canvi temporal negativa del flux:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mathcal{B}\omega \cos(\omega t)$$

2.2. Corrent induït en el model resistiu

Si considerem que l'anell no té inductància (és a dir, $L = 0$), el circuit elèctric induït es pot modelar només amb una resistència R. El corrent que circula a l'anell serà, per la llei d'Ohm:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = -\frac{\mathcal{B}\omega}{R} \cos(\omega t)$$

Aquest corrent està en fase amb la fem, però amb un canvi de signe de 180°, com indica el factor negatiu.

2.3. Força electromagnètica instantània

Per simplificar l'anàlisi, suposem que la força electromagnètica $F(t)$ que rep l'anell és proporcional al producte entre el corrent induït i el camp magnètic en aquell instant:

$$F(t) \propto I(t) \cdot B(t) = -\frac{\mathcal{B}\omega}{R}\cos(\omega t) \cdot B_0 \sin(\omega t) = -\frac{\mathcal{B}\omega B_0}{R}\cos(\omega t)\sin(\omega t)$$

Físicament, això representa la interacció entre el corrent induït que genera un camp magnètic propi i el camp extern aplicat.

2.4. Càlcul de la força electromagnètica mitjana

Volem determinar la força mitjana durant un període complet $T = \frac{2\pi}{\omega}$. La mitjana es defineix com:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt = -\frac{\mathcal{B}\omega B_0}{R}\frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\sin(\omega t)dt$$

Fent el canvi de variable $\theta = \omega t$, la integral es transforma en:

$$\langle F \rangle = -\frac{\mathcal{B}\omega B_0}{R}\frac{\omega}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta = -\frac{\mathcal{B}\omega B_0}{R}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta$$

La integral trigonomètrica es resol així:

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Per tant:

$$\langle F \rangle = 0$$

2.5. Interpretació i limitacions

Aquest resultat matemàtic implica que, en el model on l'anell és només una resistència (sense inductància), la força electromagnètica mitjana és nul·la. Això significa que, segons aquest model, l'anell no hauria d'experimentar cap força neta que el faci levitar o saltar, cosa que contradiu clarament les observacions experimentals. Aquesta discrepància mostra que el model resistiu és massa simplista i no capta la física completa del problema.

En resum: el model resistiu simple prediu força mitjana zero, per això és necessari incorporar la inductància per explicar el fenomen físic observat, que és el que farem a l'apartat següent.

Model amb autoinductància ($L > 0$)

En aquest apartat considerem un model més realista per a l'anell metàl·lic, on s'inclou no només la resistència R, sinó també la inductància pròpia L. Això és essencial perquè l'anell és un conductor amb un circuit tancat i genera un camp magnètic propi associat al corrent que circula, cosa que afecta tant la intensitat com la fase del corrent induït.

3.1. Equació del circuit R-L

L'equació diferencial que regeix el corrent induït $I(t)$ és la clàssica d'un circuit resistiu-inductiu alimentat per una fem variable $\mathcal{E}(t)$:

$$\mathcal{E}(t) = L\frac{dI}{dt} + RI(t)$$

On:

- L és l'autoinductància de l'anell, mesura de la seva capacitat d'emmagatzemar energia magnètica.
- R és la resistència elèctrica de l'anell.
- $\mathcal{E}(t)$ és la fem induïda, originada pel canvi de flux magnètic.

3.2. Fem induïda per la llei de Faraday

Considerem la mateixa fem sinusoidal que en el model resistiu:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mathcal{B}\omega\cos(\omega t)$$

on $\mathcal{B}$ representa el flux màxim que travessa l'anell, i $\omega = 2\pi f$ la pulsació.

3.3. Solució de la corrent induïda

Busquem una solució sinusoidal per a $I(t)$ de la forma:

$$I(t) = I_0\cos(\omega t - \phi)$$

on I_0 és l'amplitud màxima del corrent i ϕ és el desfasament respecte la fem.
Substituïm aquesta expressió i la de $\mathcal{E}(t)$ en l'equació del circuit:

$$-\mathcal{B}\omega\cos(\omega t) = L\frac{d}{dt}\left(I_0\cos(\omega t-\phi)\right) + RI_0\cos(\omega t-\phi)$$

Calculant la derivada:

$$\frac{d}{dt}\cos(\omega t-\phi) = -\omega\sin(\omega t-\phi)$$

La substitució dona:

$$-\mathcal{B}\omega\cos(\omega t) = -L\omega I_0\sin(\omega t-\phi) + RI_0\cos(\omega t-\phi)$$

3.4. Desfasament i amplitud

Expressant els termes trigonomètrics:

$$\cos(\omega t-\phi) = \cos\phi\cos\omega t + \sin\phi\sin\omega t$$
$$\sin(\omega t-\phi) = \sin\omega t\cos\phi - \cos\omega t\sin\phi$$

Reagrupant per les funcions base $\cos\omega t$ i $\sin\omega t$, obtenim:

$$-\mathcal{B}\omega\cos\omega t = I_0\left[(L\omega\sin\phi + R\cos\phi)\cos\omega t + (R\sin\phi - L\omega\cos\phi)\sin\omega t\right]$$

Perquè la igualtat sigui certa per a tot t, els coeficients de $\cos\omega t$ i $\sin\omega t$ han de ser iguals respectivament:

$$\begin{aligned} -\mathcal{B}\omega &= I_0(L\omega\sin\phi + R\cos\phi) \\ 0 &= I_0(R\sin\phi - L\omega\cos\phi) \end{aligned}$$

La segona expressió proporciona el desfasament:

$$R\sin\phi = L\omega\cos\phi \implies \tan\phi = \frac{L\omega}{R}$$

Amb aquest ϕ, la primera equació permet determinar l'amplitud:

$$I_0 = \frac{\mathcal{B}\omega}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}$$

3.5. Interpretació física del desfasament

Aquest desfasament ϕ representa el retard del corrent respecte la fem a causa de l'efecte inductiu, que fa que el corrent no sigui simplement proporcional a la fem sinó que també estigui desfasada en el temps. Aquest fet és clau per generar una força electromagnètica mitjana no nul·la.

3.6. Càlcul de la força electromagnètica mitjana

La força instantània que actua sobre l'anell és proporcional al producte del corrent i el camp magnètic:

$$F(t) \propto I(t)B(t) = I_0 B_0 \cos(\omega t - \phi) \sin(\omega t)$$

La força mitjana sobre un període complet $T = \frac{2\pi}{\omega}$ és:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I_0 B_0 \cos(\omega t - \phi) \sin(\omega t) dt$$

Fent el canvi $\theta = \omega t$:

$$\langle F \rangle = \frac{I_0 B_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta - \phi) \sin(\theta) d\theta$$

Utilitzant la identitat trigonomètrica:

$$\cos(\theta - \phi) = \cos\theta \cos\phi + \sin\theta \sin\phi$$

la integral es separa en:

$$\langle F \rangle = \frac{I_0 B_0}{2\pi} \left(\cos\phi \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta + \sin\phi \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \right)$$

On sabem que:

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \pi$$

Per tant:

$$\langle F \rangle = \frac{I_0 B_0}{2} \sin\phi$$

Substituint les expressions de I_0 i $\sin\phi = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$:

$$\boxed{\langle F \rangle \propto \frac{\mathcal{B} B_0 L \omega^2}{R^2 + (L\omega)^2}}$$

Model avançat: inductància i resistència variables i dinàmica mecànica

4.1. Motivació i visió global

Els models resistiu i R–L tractats als apartats anteriors serveixen per comprendre la *qualitat* del fenomen (la necessitat de desfasament entre B i I). Tot i així, fallen quan volem predir *quantitativament* la trajectòria real de l'anell o la seva alçada d'equilibri. El motiu és que, en la pràctica, la mateixa presència de l'anell altera el camp magnètic que el genera: a cada nova posició canvia el flux, i per tant canvien la inductància L i la resistència òhmica efectiva R. A més, la força que experimenta l'anell depèn fortament de la interacció *instantània* entre camp, corrent, velocitat i energia magnètica. Per capturar aquesta retroalimentació cal un **model acoblat** elèctric–mecànic amb paràmetres espacials.

4.2. Dependència espacial de $L(x)$ i $R(x)$

1. **Inductància** $L(x)$**.** Quan l'anell és proper al nucli de la bobina, la major part de les línies de camp magnètic el travessen i la inductància total del circuit "bobina + anell" és elevada. En pujar l'anell, el flux encastat dins la seva superfície disminueix—i, amb ell, L. En molts experiments reals, $L(x)$ es pot aproximar amb una funció decreixent suau, per exemple una llei exponencial o rati fraccional del tipus $L(x) = L_0\big[1+\beta\exp(-x/\lambda)\big]$, on λ és la longitud característica del camp.

2. **Resistència** $R(x)$**.** De forma semblant, la resistència efectiva no és estrictament constant:

   - El camí del corrent de Foucault canvia lleugerament amb la distribució de B; això modifica l'*inductància de fuga* i —per efecte de pell— la resistència aparent.
   - L'anell s'escalfa per pèrdues I^2R. La resistivitat de l'alumini creix linealment amb la temperatura ($\rho \propto 1 + 0{,}004\,\Delta T$), de manera que R augmenta a mesura que el metall s'escalfa. Com que l'escalfament mateix depèn de la distància (camp més fort $\Rightarrow$ pèrdues més grans), R hereta també una dependència espacial eficaç.

   En simulacions, és habitual emparellar aquests dos efectes dins un únic terme tabulat $R(x)$ obtingut experimentalment o amb simulació d'eddy currents.

4.3. Equació del circuit amb paràmetres variables

Partim de la forma diferencial de la llei de Faraday aplicada al circuit format per l'anell (*circuit secundari*):

$$\boxed{\mathcal{E}(t) = L\big(x(t)\big)\,\frac{dI}{dt} + R\big(x(t)\big)\,I(t) + I(t)\,\frac{dL}{dx}\,\frac{dx}{dt}} \tag{1}$$

Interpretació terme a terme

- $L(x)\,\dot{I}$: tensió autoinductiva "estàtica". Si L fos constant, aquest seria l'únic terme inductiu.
- $R(x)\,I$: caiguda òhmica; absorbeix la dissipació instantània $P_R = I^2 R$.
- $I\,L'(x)\,\dot{x}$: **tensió electromotriu de moviment**. És conseqüència directa de la regla de la cadena:
  $$\frac{d}{dt}\big[L(x)I\big] = L\,\dot{I} + I\,L'(x)\,\dot{x}.$$
  Representa la manera com el sistema elèctric "nota" el desplaçament mecànic: un canvi d'inductància genera una fem que s'oposa al moviment—equivalent al corrent de Foucault de *Lenz*.

4.4. Energia magnètica i força electromagnètica

L'energia emmagatzemada al camp és

$$U_m(x,t) = \frac{1}{2}\,L(x)\,I^2(t).$$

La derivada negativa respecte de la coordenada x dona la força generalitzada que actua sobre l'anell[1]:

$$\boxed{F(x,t) = -\frac{\partial U_m}{\partial x} = -\tfrac{1}{2}\,I^2(t)\,\frac{dL}{dx}} \tag{2}$$

Direcció i signe de la força

1. Si $L'(x) < 0$ (inductància decreixent amb l'altura), aleshores $F > 0$ i la força és *cap amunt*: l'anell és empenyat a la regió on el camp és més intens (mantenir l'energia).
2. Si $L'(x) > 0$ (molt poc freqüent a la configuració habitual) obtindríem una força de retenció o "clau" magnètica, no un impuls de llançament.

[1] Estrictament, si el camp no és unidimensional cal prendre el gradient de U_m respecte a la trajectòria.

Aquesta expressió és coherent amb el terme dinàmic de l'equació (1): multiplicant (2) per la velocitat $\dot{x}$ s'obté el flux de potència mecànica $-\frac{1}{2}\,I^2\,L'(x)\,\dot{x}$, exactament oposat al terme $I\,L'\,\dot{x}$ de la potència elèctrica, tancant el *balanç d'energia*:

$$P_{\text{elèc}} = \mathcal{E}\,I = L\,\dot{I}\,I + R\,I^2 + \underbrace{I^2 L'(x)\dot{x}}_{=-P_{\text{mec}}}.$$

4.5. Dinàmica mecànica acoblada

El moviment vertical de l'anell (massa m) segueix la segona llei de Newton:

$$m\,\ddot{x} = F(x,t) - mg, \quad \text{on } F \text{ ve de (2).}$$

Així, el sistema complet ve descrit pel conjunt d'E.D.O.:

$$\begin{cases} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= \dfrac{-\frac{1}{2}\,I^2\,L'(x) - mg}{m}, \\ \dot{I} &= \dfrac{\mathcal{E}(t) - R(x)\,I - I\,L'(x)\,v}{L(x)}. \end{cases}$$

Es tracta d'un **sistema no lineal de tercer ordre** (coupled electromechanical), amb fonts $\mathcal{E}(t)$ de freqüència de xarxa (50 Hz) o, en laboratoris, fins a 400 Hz per maximitzar l'efecte pel·licular.

4.6. Anàlisi qualitativa dels règims de funcionament

1. Règim transitori d'encesa Quan s'aplica $\mathcal{E}(t)$ (temps $t = 0$), la magnitud de $\dot{I}$ és màxima i el terme $-\frac{1}{2}I^2L'(x)$ pot assolir valors prou grans per donar un *impuls* vertical que fa "saltar" l'anell. Sovint la velocitat aconsegueix uns quants metres per segon en menys d'un període AC.

2. Levitació quasiestable En alçada intermitja x_{eq}, el valor mitjà sobre molts cicles compleix $\langle F\rangle = mg$. Aquest equilibri és dinàmic, ja que $F(x,t)$ oscil·la 2ω vegades per cicle; així i tot, la resposta mecànica, molt més lenta ($f_0 \sim$ 10–30 Hz), lisa l'oscil·lació i manté l'anell en suspensió. La *fase* entre I i B és essencial: petits canvis de desfasament ($\Delta\varphi \sim 5°$) poden fer variar $\langle F\rangle$ més d'un 20 %.

3. Descens per escalfament El corrent induït dissipa calor (pèrdues I^2R). Quan la temperatura puja, $R(x)$ creix, I minva, $F \propto I^2$ baixa i l'anell cau fins que la nova $\langle F\rangle$ torna a igualar mg. Aquesta retroacció explica per què, després d'uns segons, l'anell sol estabilitzar-se a una alçada lleugerament menor que la del punt àlgid inicial.

4.7. Estratègies de simulació numèrica

1. *Caracterització empírica*
   Mesura experimental de $L(x)$ i $R(x)$ col·locant l'anell en posicions fixes i injectant corrents de prova de baixa freqüència. S'ajusten polinomis o splines (tipus Akima) per evitar soroll.

2. *Integrador de Runge–Kutta 4/5*
   Escollir pas $h \leq 1/2000 f_{\mathrm{AC}}$ (p. ex. $h = 10^{-5}$ s per 50 Hz) garanteix que es capturen correctament tant la portadora elèctrica com la dinàmica mecànica.

3. *Coupling amb camp 2D/3D*
   Per a més precisió, $L(x)$ i $R(x)$ poden ser actualitzats a cada pas amb un solver de camp quasiestacionari (FEMM, COMSOL) girat en axisimetria.

4.8. Validació experimental

- **Trajectòria**: càmera d'alta velocitat (>1000 fps) + Tracker per extreure $x(t)$. Compareu amb la integrada de (†) i ajusteu $L(x)$, $R(x)$ fins a aconseguir <5 % d'error.

- **Corrent d'anell**: sonda Hall diferencial al conductor de la bobina; filtrat passa-baix per aïllar la component de 50 Hz que és transferida a l'anell.

- **Temperatura**: termoparell tipus K soldat a la cara interna de l'anell + emissivitat calibrada amb càmera infraroja.

4.9. Conclusions del model avançat

El terme addicional $I\,L'(x)\,v$ de l'equació del circuit $(*)$ i la força derivada $-\frac{1}{2}I^2L'(x)$ $(**)$ constitueixen dues manifestacions complementàries d'un mateix principi de conservació: tota variació d'energia magnètica que no es dissipa com calor es converteix en treball mecànic (i viceversa). Només considerant aquesta *doble* dependència (elèctrica i mecànica) és possible predir—amb precisió d'enginyeria—el salt inicial, l'alçada de sustentació, i la desacceleració tèrmica observades al clàssic experiment d'anell de Thomson.

Conclusions Finals

La trajectòria intel·lectual que hem recorregut —des del model excessivament simplificat on la resistència és l'únic element fins al model electrodinàmic complet amb paràmetres dependents de la posició i retroacció tèrmica— il·lustra amb claredat una màxima de la metodologia científica: quan teoria i experiment xoquen, el progrés s'assoleix incorporant el *mecanisme físic* que falta i verificant de nou la predicció.

1. El punt de partida: el model resistiu
Assumir una inductància zero ($L = 0$) és legítim com a exercici introductori, però condueix inexorablement a una força mitjana nul·la $\langle F \rangle = 0$. La contradicció amb la realitat —on l'anell salta i fins i tot levita— és immediata i serveix d'avís que la hipòtesi d'anell purament òhmic omet un ingredient fonamental.

2. El primer refinament: el model R–L estacionari
En afegir l'*autoinductància* apareix un desfasament inevitable entre la f.e.m. induïda i la corrent $I(t)$. Aquest desfasament trenca la simetria temporal $IB \to -IB$, i el producte $I(t)B(t)$ conté ara una component contínua capaç de generar una $\langle F \rangle > 0$. L'«anell de Thomson» surt projectat perquè la força electromagnètica mitjana venç el pes, fenomen que ja podem quantificar amb $\langle F \rangle \propto L\omega^2 / \big(R^2 + L^2\omega^2\big)$.

3. El pas decisiu: el model dinàmic amb $L(x)$ i $R(x)$
La realitat, però, és més subtil: quan l'anell es desplaça, modifica el flux que el travessa i, per tant, la pròpia inductància; simultàniament s'escalfa per pèrdues I^2R, cosa que fa créixer la seva resistència efectiva. Incorporar aquestes dependències $L = L(x)$ i $R = R(x, T)$ condueix a un *sistema acoblat* de tres equacions diferencials (dues mecàniques, una elèctrica) on cada magnitud influeix constantment en les altres. El terme addicional $I\,L'(x)\,\dot{x}$ que apareix a l'equació del circuit és la contrapart elèctrica de la força $-\frac{1}{2}I^2L'(x)$ que actua sobre l'anell; tots dos exprimeixen la conservació d'energia entre domini magnètic i mecànic.

4. Resultats i prediccions del model avançat

- *Salt inicial*: la velocitat de creixement de I en l'instant d'encesa és màxima; si $L'(0)$ és prou negatiu, la força impulsiva supera amb escreix mg i projecta l'anell.

- *Levitació quasiestable*: l'alçada d'equilibri x_{eq} s'assoleix quan la component mitjana de $-\frac{1}{2}I^2L'(x)$ iguala el pes; la fase entre camp i corrent, controlada per R/L i per la freqüència, governa l'estabilitat.

- *Descens tèrmic*: l'escalfament incrementa R, redueix I i, en conseqüència, fa minvar la força; l'anell baixa fins que el balanç es restableix a menor alçada.

- *Oscil·lacions lliures*: el model prediu modes mecànics propis (10-30 Hz) excitats per soroll elèctric o per canvis sobtats de tensió; la fricció viscosa i la pèrdua per corrent de Foucault les esmorteeixen en pocs segons.

Bibliografia

[1] S. S. Reelkar, U. V. Patil, V. V. Khatavkar *et al.*, “Electromagnetic Launcher: Review of Various Structures,” *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*, vol. 9, no. 09, Sept. 2020. `http://www.ijert.org`

[2] R. D. Thornton, “Electromagnetic launching of conductive rings—An undergraduate experiment,” *American Journal of Physics*, vol. 42, no. 11, pp. 921–923, 1974.

[3] B. Jakubowski, “Ring launcher experiment,” *The Physics Teacher*, vol. 40, pp. 176–177, Apr. 2002.

[4] C. A. Fowler and R. W. Giovanelli, “The Thomson ring experiment,” *European Journal of Physics*, vol. 27, no. 1, pp. 69–77, 2006.

[5] W. J. Carey and P. M. Grant, “Ring levitation by alternating magnetic field,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 21, no. 5, pp. 1150–1153, 1985.

[6] M. Poon and D. Nour, “Modeling transient eddy–current forces on conducting rings,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 46, no. 12, pp. 4019–4022, 2010.

[7] A. Anders, “Tracking down the cause of eddy-current forces and heating in metals,” *Journal of Vacuum Science & Technology A*, vol. 33, 020801, 2015.

[8] J. D. Kraus and D. A. Fleisch, *Electromagnetics with Applications*, 5th ed., McGraw-Hill, 1991.

[9] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4th ed., Pearson, 2013.

[10] D. C. Meeker, *Finite Element Method Magnetics*, Version 4.2, 2016. Available at `http://www.femm.info`