CLUB DE FÍSICA

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

Introducció a Àlgebres Geomètriques

Projecte del Club de Física

Autor:
Alejandro de la Cruz Foz

16 d'octubre de 2026

Índex

Prefaci **3**

1 Preliminars i motivació **4**
1.1 Objectes geomètrics . . . 4
1.2 Com i per què multiplicar vectors? . . . 4
1.3 Producte exterior de vectors. Fulles i multivectors . . . 6
1.3.1 Com dividir vectors . . . 8

2 Àlgebra geomètrica del pla **9**
2.1 El bivector unitari . . . 9
2.2 L'estructura de $\mathcal{G}_2$ . . . 11
2.3 Reflexions i rotacions . . . 11
2.3.1 Reflexions al llarg d'un eix . . . 11
2.3.2 Rotacions . . . 12
2.4 La subàlgebra parell $\mathcal{G}_+$ i nombres complexos . . . 14

3 Àlgebra geomètrica de l'espai **16**
3.1 Multivectors en tres dimensions . . . 16
3.1.1 Bivectors . . . 16
3.1.2 El pseudoescalar unitat . . . 18
3.1.3 Matrius de Pauli . . . 19
3.2 Projecció de grau i reversió . . . 20
3.3 Reflexions de bivectors i trivectors . . . 21
3.3.1 Composició de rotors . . . 22

4 Generalització i desenvolupament axiomàtic **24**
4.1 Definició axiomàtica . . . 24
4.1.1 Axiomes de $\mathcal{G}$ . . . 24
4.1.2 Teoremes útils . . . 25
4.2 Els productes intern, extern, i geomètric . . . 26
4.2.1 Productes intern i extern d'un vector i un r-vector . . . 26
4.2.2 Operadors addicionals . . . 27
4.3 Dualitat, sistemes, components . . . 30
4.3.1 El pseudoescalar . . . 30
4.3.2 Sistemes . . . 31

5 Àlgebra geomètrica de l'espai-temps **33**
5.1 Objectes de grau superior . . . 34
5.1.1 Bivectors temporals i espacials . . . 34
5.1.2 El pseudoescalar en STA . . . 35

5.2 Relativitat especial en STA 35
5.2.1 Transformacions de Lorentz 35
5.2.2 Sistemes de referència relatius 37

Conclusió **39**

Bibliografia **40**

Prefaci

També anomenades àlgebres de Clifford en honor al seu inventor William K. Clifford, les àlgebres geomètriques són un tipus d'estructura matemàtica que generalitza i unifica molts conceptes: partint només de vectors i escalars, conceptes com els nombres (hiper)complexos, rotacions tant euclideanes com hiperbòliques, la representació dels fermions amb espinors, les matrius de Pauli i Dirac... apareixen tots de forma completament natural i espontània.

Des del seu revival per *David Hestenes* l'any 1966, les àlgebres geomètriques han estat aplicades a una miríada de camps diferents. Van néixer com a eina per estudiar amb major facilitat teoria de Dirac i relativitat general (on es sol anomenar STA, *spacetime algebra*), però actualment es poden trobar a gairebé tots els camps de la física, notablement l'electromagnetisme on permeten unir en una les equacions de Maxwell: $\nabla F = J$. En anys més recents s'ha aplicat extensament a geometria projectiva (PGA, *projective geometric algebra*) i ha brillat en el camp de la computació gràfica.

El seu major punt feble és amb diferència el poc estàndard que són: sovint els físics les deixem de banda per ser "massa matemàtiques" mentre que els matemàtics les ignoren per ser "massa per físics". Això també vol dir que els llibres i papers que fan servir aquestes teories solen ser escassos i caure en l'oblit. Res d'això li treu que sigui una eina molt poderosa per tant la física com les matemàtiques.

L'objectiu d'aquest paperillo és donar a conèixer aquestes idees d'una manera el màxim de lleugera i compacta possible: en comptes d'un desenvolupament rígid i axiomàtic, he optat per reservar les matemàtiques més denses pel final i dedicar la resta del paperillo a estudiar en detall algunes àlgebres geomètriques bàsiques que donen bé a conèixer aquesta teoria. La majoria del document es dedicarà a estudiar les VGAs (*vector geometric algebra*) més simples, i al final farem una molt breu introducció a la STA.

M'he basat principalment en el Doran-Lasenby[2] i sovint he recorregut al Chisolm[1] quan volia rigor matemàtic. De tant en tant he contrastat ambdós amb el Hestenes-Sobczyk[3]. Personalment recomano el Doran-Lasenby: a part de ser molt lleuger i conversacional, es centra molt en la intuició geomètrica i física. El Chisolm es força dens i molt matemàtic (casi tota la deducció és purament a partir d'axiomes bàsics, en comptes de fer casos concrets com $\mathcal{G}_2$ i $\mathcal{G}_3$ com el Doran-Lasenby), així que el recomano a gent que busqui més rigor i profunditat des d'un principi; els primers capítols són molt clars i entenedors però la complexitat es dispara cap al capítol quatre.

Preliminars i motivació

1.1. Objectes geomètrics

Entenem com a objecte geomètric qualsevol objecte matemàtic al qual hi puguem associar certa intuició geomètrica o física. Aquesta definició és molt informal i només ens serveix com a primer pas per començar a fer-nos preguntes i plantejar-nos cap a on hem d'anar al principi.

De moment l'únic objecte geomètric que coneixem són els **vectors**, que són l'exemple més simple. Es distingeixen de plans, cubs, esferes... en que aquests van descrits "a trossos" mentre que els vectors són *un únic objecte*. Sovint diem que els vectors tenen *"mòdul i direcció"*. Aquesta noció es pot generalitzar a qualsevol objecte geomètric si en comptes de mòdul i direcció parlem de tres característiques diferents:

1. **Actitud**: el subespai en qüestió (línia, pla, paral·lelepíped...).
2. **Pes**: una magnitud escalar que ens diu com de "gran" és l'objecte (longitud, àrea, volum...).
3. **Orientació**: pot ser o positiva ("endavant", "antihorària") o negativa ("enrere", "horària").

Per un vector, l'actitud és la direcció; l'orientació, el sentit; el pes, el mòdul. Aquestes definicions poden semblar arbitràries, i tindran més sentit quan comencem a parlar de *multi*vectors.

Dit d'altra manera, els objectes geomètrics són aquells que *tenen sentit per sí sols*, en un buit sense fer referència a altres objectes: escalars, matrius i funcions tots es defineixen per com actúen sobre altres objectes, mentre que els vectors, de forma grollera, no són més que fletxes en l'espai.

1.2. Com i per què multiplicar vectors?

Així que per ara ens hem de centrar en els vectors. Però ben ràpid ens adonem que tenim un problema molt greu: **com multipliquem els vectors?**

Coneixem d'àlgebra de tota la vida dos productes de vectors, però cap dels dos ens agrada:

- El producte escalar/intern $a \cdot b$ retorna un escalar en comptes d'un vector. Seguint la terminologia d'abans, obtenim només un *pes* i perdem tota informació sobre *actitud i orientació*. El podem seguir utilitzant per fer projeccions, però ens interessaria un producte que retornés un objecte amb sentit geomètric (que no té per què ser un altre vector!).

- El producte vectorial només funciona en 3 dimensions: en dues dimensions el resultat és un vector "exterior" al pla, i en quatre o més dimensions els vectors normals a superfícies no són únics. A sobre, el resultat del producte vectorial és un "pseudovector", ja que no transforma com un vector.[1]

Així que busquem un producte que solucioni els problemes que acabem d'exposar i que a sobre obeeixi les propietats usuals d'operacions binàries: que sigui distributiu i associatiu, que hi hagi un element neutre i elements inversos... De pas, per fer-nos més fàcil la vida, imposem que sigui bilineal. Anem a denotar el producte entre dos vectors u, v com a uv, i descomposem-lo en components simètric ($uv = vu$) i antisimètric ($uv = -vu$):

$$uv = \underbrace{\frac{1}{2}(uv + vu)}_{\text{simètric}} + \underbrace{\frac{1}{2}(uv - vu)}_{\text{antisimètric}}$$

Ara només ens cal posar-li cara i ulls a cadascun d'aquests dos components:

- El terme simètric el podem associar simplement amb el producte intern $u \cdot v$, ja que té exactament les mateixes propietats.

- Pel terme antisimètric ho tenim una mica més complicat. El més natural seria relacionar-lo amb el producte vectorial $u \times v$, però acabem de veure que aquest no funciona en un nombre arbitrari de dimensions. Aleshores, definim un **producte exterior** $u \wedge v$ que veurem en més detall al següent apartat.

Per tant, el producte geomètric té la següent forma:

$$uv := u \cdot v + u \wedge v$$

Aquest resultat fa una mica de por: el producte exterior ens donarà un objecte relativament semblant a un vector (en res veurem quina forma té exactament), mentre que el producte intern donarà un escalar. Per tant, com és que sumem un escalar i un "vector"? Això només cal pensar-ho com una suma formal: és igual que quan sumem un nombre real i un imaginari, o els diferents coeficients d'un polinomi.

Aleshores, les propietats del producte geomètric són les següents:

[1] En concret, canvia de signe si canviem la orientació de la base. Pels setciències, *tècnicament* el producte vectorial funciona en 7 dimensions però aquí és irrellevant.

1. Associativitat:
$$u(vw) = (uv)w$$

2. Distributivitat per l'esquerra i dreta amb la suma:
$$u(v+w) = uv + uw, \quad (u+v)w = uw + vw$$

3. Bilinealitat:
$$(\alpha u)(\beta v) = (\alpha\beta)\, uv$$

4. El quadrat de tot vector és un escalar donat per una forma quadràtica: $v^2 = Q(v)$. Assumirem en tot cas que aquesta forma és no-degenerada (i, per tant, no-nul·la)

1.3. Producte exterior de vectors. Fulles i multivectors

Tornem ara al producte exterior un segon. Axiomàticament, el definim a partir de les següents propietats:

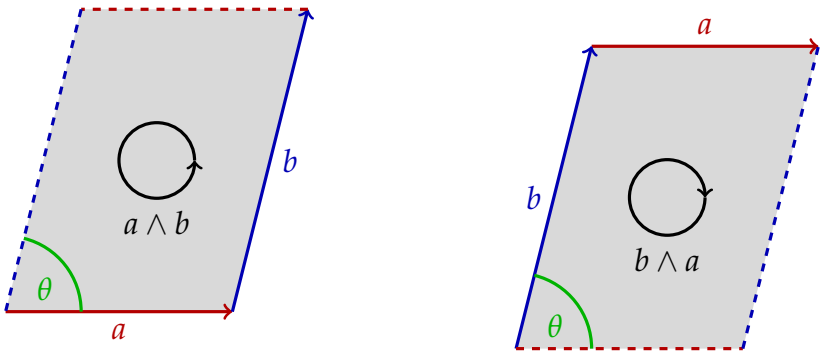
1. Associativitat:
$$u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$$
Gràcies a això ens podem estalviar els parèntesis i escriure $u \wedge v \wedge w$

2. Distributivitat:
$$(u+v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w, \quad u \wedge (v+w) = u \wedge v + u \wedge w$$

3. Bilinealitat:
$$(\alpha u) \wedge (\beta v) = (\alpha\beta)\, u \wedge v$$

4. Antisimetria:
$$u \wedge v = -v \wedge u \implies u \wedge u = 0$$

A nivell geomètric, el producte exterior de dos vectors es sol interpretar com un element d'àrea bidimensional (actitud) amb una certa àrea (pes) i una orientació:



Ens descriu un pla igual que el producte vectorial, però la gràcia del producte exterior és que el podem fer servir en qualsevol nombre de dimensions. A més, el producte vectorial ens descrivia no el pla sinò el seu vector normal, mentre que aquest producte ens dóna directament el pla.

De pas, anem a definir un parell de termes que seran crucials més endavant:

- Una ***r*-fulla** (en anglés *r-blade*, també ***r*-vector simple**) és un objecte que es pot expressar com el producte exterior de r vectors. En general, una r-fulla A_r es pot expressar:

$$A_r = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r$$

- Similarment, un ***r*-vector** (també **multivector de grau** r) és una combinació lineal de r-fulles:

$$A = A_r + B_r + \cdots = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r + u_1 \wedge \cdots \wedge u_r + \cdots$$

Veiem que tota r-fulla és un r-vector, però no al revés. Aquesta separació pot semblar arbitrària i nebulosa, ja que en dues i tres dimensions tots els r-vectors són també r-fulles. Per exemple, en tres dimensions podem prendre el següent bivector i reordenar termes fins arribar a una 2-fulla:

$$e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_3 = e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_2 = (e_1 - e_3) \wedge e_2$$

i el procediment és idèntic per tot bivector tridimensional. En quatre dimensions, però, podem tindre bivectors de la següent forma:

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$$

que, per molt que reordenem, *mai* podrem expressar com a producte de dos vectors. Fixem-nos també en que els multivectors de grau 0 i grau 1 no són més que els escalars i vectors, respectivament.

Aquests dos objectes són el que anomenem **multivectors**. En concret, els r-vectors i les r-fulles són **multivectors homogenis de grau** r. Que un multivector sigui homogeni vol dir que tots els components són del mateix grau. És fàcil veure que els escalars i els vectors són fulles de grau 0 i 1 respectivament. Per un exemple d'un multivector no homogeni podem triar per exemple:

$$M = 1 + v$$

o qualsevol combinació similar d'objectes de diferents graus. Només té sentit parlar de graus a l'hora de tractar amb multivectors homogenis, ja que els multivectors no homogenis tenen grau mixte - a l'exemple que acabem de posar, M tindria grau mixt al tindre components de grau tant 0 com 1.

Finalment, un petit incís: imaginem que els nostres vectors $e_1, e_2, \cdots$ són ortogonals. Aleshores, $e_i \cdot e_j \propto \delta_{ij}$, així que per $i \neq j$ el seu producte geomètric serà:

$$e_i e_j = e_i \cdot e_j + e_i \wedge e_j = e_i \wedge e_j$$

Quan passa això, diem que els vectors **anticommuten** (en general, dos vectors anticommuten sii són ortogonals). Aquesta propietat permet alleugerar molt la notació, i la farem servir força més endavant.

1.3.1. Com dividir vectors

Al definir el producte geomètric, a vegades sorgeix una idea: si ara tenim una manera per multiplicar vectors que es comporti bé, podem trobar una manera de dividir vectors? La resposta és sí, i és un tret molt únic de les àlgebres geomètriques.

Donat un v no nul, podem definir la seva inversa v^{-1} tal que es satisfaci:

$$vv^{-1} = 1$$

Com 1 és un escalar, vv^{-1} no pot tindre terme bivectorial:

$$v \wedge v^{-1} = 0$$

que vol dir que v i la seva inversa són combinació lineal l'un de l'altre, dit d'altra manera *són paral·lels*:

$$vv^{-1} = v \cdot v^{-1} = 1$$

Per la desigualtat Cauchy-Schwartz (en aquest cas igualtat perquè els dos vectors són colineals) necessàriament hem de tindre:

$$|v^{-1}| = \frac{1}{|v|}$$

que ens permet expressar v^{-1} en termes de v:

$$v^{-1} = \frac{v}{|v|^2} = \frac{v}{vv} = \frac{1}{v}$$

Farem servir això molt sovint quan parlem de rotacions i reflexions.

Àlgebra geomètrica del pla

Com hem vist que l'àlgebra geomètrica en una dimensió no té res d'especial (només tenim els escalars i vectors de tota la vida i tots els productes exteriors s'anul·len), anem a veure el cas més simple d'una àlgebra geomètrica que ens porta noves propietats: el pla bidimensional. Aquesta sovint s'anomena $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}(2)$, o $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$.

Sobre un pla, podem definir una base ortonormal usual pels vectors, (e_1, e_2), que satisfaci:

$$e_1^2 = e_2^2 = 1, \qquad e_1 \cdot e_2 = 0$$

Aleshores tots els productes exteriors es reduïran al mateix bivector e_1e_2 que, fins a proporcionalitat i orientació, correspon al pla sencer. Veiem també que no hi han trivectors, ja que aleshores tindríem un volum "fora del pla" que és impossible de construïr a partir de només e_1 i e_2. Matemàticament és immediat que tot producte exterior de tres vectors diferents ha de desaparèixer al haver-hi vectors repetits.

Tornant al bivector e_1e_2, aquest té propietats tan úniques que es mereix el seu propi apartat:

2.1. El bivector unitari

Geomètricament, e_1e_2 és simplement un pla d'àrea 1 recorregut en sentit antihorari, però què n'hi ha de les seves propietats algebraiques? Primer, anem a veure quin és el seu quadrat:

$$(e_1e_2)^2 = (e_1e_2)(e_1e_2) = e_1e_2e_1e_2 = -e_1e_1e_2e_2 = -1$$

Sense haver mencionat en cap moment els nombres complexos, hem trobat un nombre el quadrat del qual dona un negatiu! Per analogia amb el nombre imaginari, anem a batejar aquest bivector de la següent manera:

$$I := e_1e_2$$

i en general es sol anomenar el **pseudoescalar unitat** (o simplement pseudoescalar), que en n dimensions es generalitza a:

$$I := e_1e_2 \cdots e_n$$

i sempre genera la subàlgebra exterior de major grau (n). No sempre serà cert $I^2 = -1$ (per exemple en 0 o 1 dimensions), però *sempre* tindrem $|I^2| = 1$.[1]

[1] Molts autors (princpialment Hestenes) també el denoten i per enfortir la relació amb els nombres complexos, però el consens general és que aquesta notació és confusa i s'hauria d'evitar.

Tornant a l'analogia amb i, sabem que la unitat imaginària rota nombres complexos 90° en sentit antihorari. Anem a veure si I també fa això, aplicant-lo als vectors de la base per l'esquerra com si fos un operador:

$$Ie_1 = e_1e_2e_1 = -e_1e_1e_2 = -e_2$$
$$Ie_2 = e_1e_2e_2 = e_1$$

que és un gir de 90°, però en sentit horari...! Per tant, si multipliquem per la dreta, què passa?

$$e_1I = e_1e_1e_2 = e_2$$
$$e_2I = e_2e_1e_2 = -e_1e_2e_2 = -e_1$$

i obtenim la rotació que buscàvem!

Veiem també el següent patró:

$$Ie_1 = -e_1I, \quad Ie_2 = -e_2I$$

Així que en dues dimensions el pseudoescalar anticommuta amb tots els vectors. Podem imaginar que això estarà relacionat amb la dimensió de l'àlgebra, ja que en una dimensió es pseudoescalar (que seria $I = e_1$) commuta amb vectors - a l'apartat de geometria del volum veurem que això depèn de si la dimensió és parell o senar i altres conseqüències importants relacionades.

Algú podria pensar aquí que I és també una transformació de dualitat, i seria completament correcte: fins a orientació, aplicar I a un vector v ens dóna l'espai ortogonal a v, i això no només funciona en dues dimensions.

Aprofitem ara per definir **l'operador reversió**:

$$^\dagger : \mathcal{G}_r \to \mathcal{G}_r$$
$$a_1a_2\cdots a_r \mapsto a_r\cdots a_2a_1$$

que és un operador lineal i a més una involució ($A^{\dagger\dagger} = A$). Veiem que no altera escalars ni vectors, només bivectors (i objectes de grau major). Trobem també que $I^\dagger = -I$, així que si considerem I la nostra unitat imaginària, aquest operador serà anàleg a la conjugació complexa.

2.2. L'estructura de $\mathcal{G}_2$

Ara que hem vist com es comporten els bivectors, intentem veure l'àlgebra geomètrica del pla de manera més holística. Hem vist que és generada per:

$$\underbrace{1}_{\text{1 escalar}} \qquad \underbrace{e_1,\, e_2}_{\text{2 vectors}} \qquad \underbrace{I}_{\text{1 pseudoescalar}}$$

així que $\mathcal{G}_2$ tindrà dimensió 4. En general, si considerem un espai vectorial de dimensió n, l'àlgebra geomètrica corresponent tindrà dimensió 2^n. Les àlgebres geomètriques són *àlgebres graduades*, el qual vol dir que s'expressen com la suma directa d'espais vectorials de diferents "graus", que en el cas del pla són

- els escalars $\mathbb{R}$ (grau 0, dimensió 1),
- els vectors $\mathbb{R}^2$ (grau 1, dimensió 2),
- i els bivectors $\bigwedge^2(\mathbb{R}^2)$.

No és casualitat que cada subàlgebra de grau r tingui dimensió $\binom{2}{r}$. Es pot demostrar que, per un espai vectorial de dimensió n, la seva subàlgebra geomètrica de grau r té dimensió $\binom{n}{r}$.
Aleshores, qualsevol multivector genèric $M \in \mathcal{G}_2$ es pot expressar de la següent manera:

$$M = \lambda + \alpha\, e_1 + \beta\, e_2 + \mu\, I$$

On $\lambda, \alpha, \beta, \mu$ són escalars, e_1, e_2 són vectors i $I = e_1 e_2$ és el pseudoescalar.

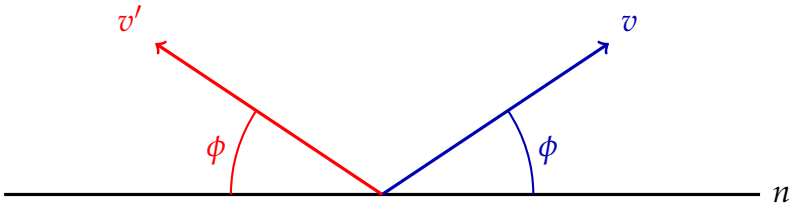
2.3. Reflexions i rotacions

Acabem de veure que les àlgebres geomètriques faciliten força l'expressió de reflexions, així que provem a descriure rotacions al pla en aquest llenguatge.

2.3.1. Reflexions al llarg d'un eix

Quan pensem en reflexar un vector, sovint ens imaginem que ho fem o a bé *través d'un pla* (els components al pla no varien i canviem de signe el component perpendicular) o bé *al llarg d'un eix* (el component paral·lel a l'eix canvia de signe i no canviem els altres). En tres dimensions aquestes dues interpretacions són equivalents, però què passa en dues, quatre, cinc...? Utilitzant només la intuició geomètrica podem veure que el segon mètode funciona en una i dues dimensions, així que ens quedem amb la idea de que les reflexions es fan al llarg d'eixos.

A priori pot costar d'imaginar, però és idèntic a les reflexions a l'òptica; per exemple, a la següent figura reflexem el vector v respecte l'eix generat per n, obtenint un nou vector v':



Considerant que el vector del nostre eix n és invertible:

$$\begin{aligned} v &= v(nn^{-1}) \\ &= (vn)n^{-1} \\ &= (v \cdot n)n^{-1} + (v \wedge n)n^{-1} \end{aligned}$$

El primer terme és la projecció ortogonal de tota la vida, i el segon sovint s'anomena **rejecció ortogonal** o residu vectorial. Amb aquesta fòrmula és fàcil expressar v' en termes de v: com hem vist a l'inici del subapartat, només cal canviar de signe la projecció (el component de v paral·lel a n) sense canviar la rejecció (el component perpendicular que comparteix amb v'):

$$v' = -(v \cdot n)n^{-1} + (v \wedge n)n^{-1}$$

Canviant l'ordre dels productes podem simplificar aquesta expressió:

$$\begin{aligned} v' &= -(n \cdot v)n^{-1} - (n \wedge v)n^{-1} \\ &= -(n \cdot v + n \wedge v)n^{-1} \\ &= -nvn^{-1} \end{aligned}$$

El fet que aparegui tant n com n^{-1} fa que es compensi el vector i no canvii el seu mòdul. Sovint n serà unitari ($nn = 1 \implies n = n^{-1}$) i tindrem el "producte sandvitx":

$$v' = -nvn$$

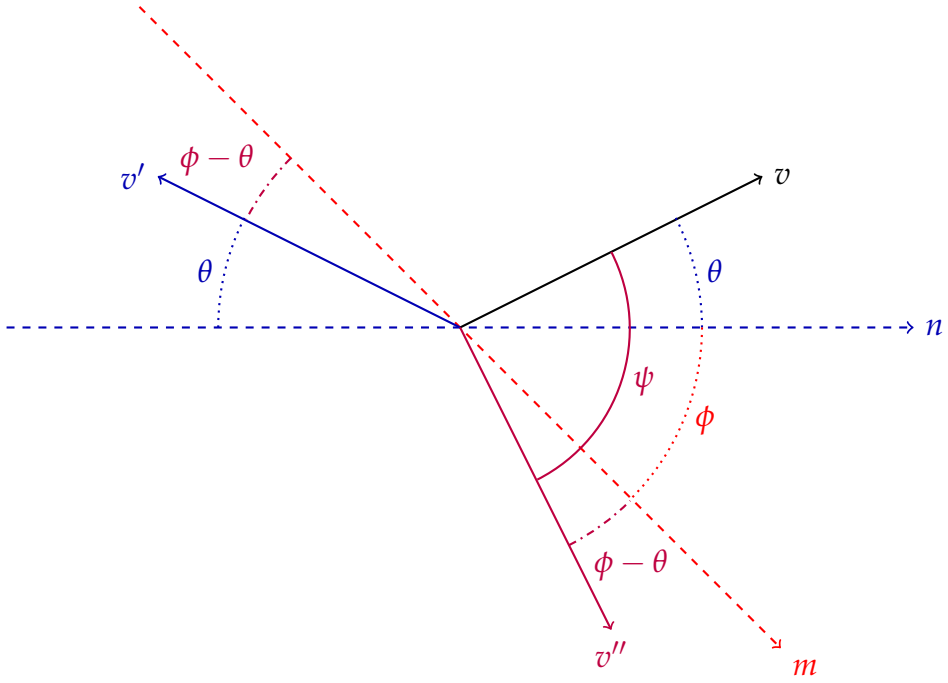
2.3.2. Rotacions

Hamilton va descobrir que sobre el pla, tota rotació es pot expressar com la composició de dues reflexions. Anem a provar això amb un vector v i dos eixos n i m que no tenen per què ser unitaris i que formen un angle ϕ. Si reflexem primer respecte n:

$$v' = -nvn^{-1}$$

$$\begin{aligned} v'' &= -mv'm^{-1} \\ &= -m(-nvn^{-1})m^{-1} \\ &= (mn)\, v\, (mn)^{-1} \end{aligned}$$

On hem utilitzat que $n^{-1}m^{-1} = (mn)^{-1}$. Anem a graficar-ho, anomenant θ i ψ als angles formats per v amb n i v'' respectivament:



Amb molta visió i intuició geomètrica podem treure:

$$\psi = \theta + \phi + \phi - \theta = 2\phi$$

és a dir, **l'angle de rotació és el doble que l'angle que formen els eixos de reflexió**. Aquest resultat és molt important i ho haurem de tindre en compte cada vegada que vulguem fer rotacions.

Ara considerem que n i m són unitaris, i recordem l'expressió anterior anomenant:

$$R := mn$$

Podem verificar ràpidament que $R^{-1} = R^\dagger$:

$$RR^{-1} = 1 = mnnm = RR^\dagger$$

Així que la rotació anterior ve donada per:

$$v' = RvR^\dagger$$

i és prou fàcil trobar la rotació inversa:

$$v' = RvR^\dagger \implies R^\dagger v' R = R^\dagger RvR^\dagger R \implies v = R^\dagger v' R$$

R és un tipus d'objecte concret que anomenarem **rotor**: el producte d'un nombre parell de vectors unitaris. Imaginem ara que volem un rotor que ens discrigui una rotació per θ (i, per tant, els eixos de reflexió formin un angle de $\theta/2$). Aleshores tindrem:

$$R = mn = m \cdot n + m \wedge n$$

El primer terme es redueix directament a $\cos(\theta/2)$. Pel segon, ens convé deixar-ho en funció d'un bivector unitari, així que normalitzem el producte exterior:

$$(n \wedge m)^2 = -\sin^2(\theta/2)$$

definim aquí el bivector unitari B:

$$B = \frac{n \wedge m}{\sin(\theta/2)} \implies \sin(\theta/2)\, B = n \wedge m$$

així que el rotor queda:

$$R = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)\, B$$

que és simplement la descomposició d'un nombre complex de mòdul 1 en coordenades polars, amb i substituïda per B (que té sentit perquè $B^2 = -1$). En general, tot objecte el quadrat del qual ens doni -1 ens descriurà rotacions. Aleshores, podem escriure:

$$R = e^{-B\,(\theta/2)}$$

Trobar $R^\dagger$ (que recordem és el mateix que R^{-1}) ara és tan fàcil com simplement canviar el signe dins l'exponencial, el qual garanteix que $RR^{-1} = R^{-1}R = 1$. Per tant, tota rotació al pla es pot expressar com a:

$$v' \mapsto -R^{-B\,(\theta/2)}\, v\, R^{B\,(\theta/2)}$$

on B és un bivector unitari que depèn de θ. Es pot demostrar que en dues dimensions tots aquests bivectors B són simplement $\pm I$

És força fàcil demostrar que aquestes rotacions "es comporten bé", és a dir, que preserven distàncies i angles; considerem dos vectors a, b i rotem-los amb el mateix rotor (tal que $a' = RaR^\dagger$ i $b' = RbR^\dagger$):

$$\begin{aligned} a' \cdot b' &= \frac{1}{2}(RaR^\dagger RbR^\dagger + RbR^\dagger RaR^\dagger) \\ &= \frac{1}{2}(RabR^\dagger + RbaR^\dagger) \\ &= \frac{1}{2}R(ab + ba)R^\dagger \\ &= (a \cdot b)RR^\dagger \\ &= a \cdot b \end{aligned}$$

2.4. La subàlgebra parell $\mathcal{G}_+$ i nombres complexos

Considerem ara la subàlgebra parell $\mathcal{G}_+$: prenem $\mathcal{G}_2$ i agafem només els components de grau parell, és a dir, els escalars i els bivectors. $\mathcal{G}_+$ és generada per $(1, I)$, de manera que qualsevol multivector Z parell es pot expressar de la forma:

$$Z = \alpha + \beta I$$

que recorda molt als nombres complexos! De fet, per les propietats que hem vist abans de I el seu comportament és gairebé idèntic. Anem a buscar alguna manera de relacionar això amb un vector amb els mateixos coeficients:

$$z = \alpha\, e_1 + \beta\, e_2$$

la resposta és immediata: només cal multiplicar per l'esquerra per e_1:

$$e_1\, z = \alpha\, e_1 e_1 + \beta\, e_1 e_2 = \alpha + \beta I = Z$$

per altra banda, el conjugat $Z^\dagger$ ve donat per fer el mateix producte però per la dreta:

$$z\, e_1 = \alpha\, e_1 e_1 + \beta\, e_2 e_1 = \alpha - \beta I = Z^\dagger$$

Aleshores, ara que hem après a rotar vectors amb rotors, anem a relacionar-ho amb el que sabem sobre rotar nombres complexos: sabem que per rotar un angle θ un nombre complex z, és tan fàcil com fer:

$$z' = e^{i\theta} z$$

Per rotar multivectors parell tentativament podem provar substituïr i pel pseudoescalar I:

$$Z' = e^{I\theta} Z$$

Ara imaginem que tenim un vector x que relacionem amb $Z \in \mathcal{G}_+$ mitjançant $e_1\, x = Z$. Aleshores, després de rotar x tindrem $x' = e_1 Z'$ (multiplicant ambdues bandes per l'esquerra per e_1). Expandint:

$$x' = e_1 Z' = e_1 e^{I\theta} Z = e_1 e^{I\theta} e_1 x$$

recordem que, per Taylor:

$$e^{I\theta} = \cos\theta + I\, \sin\theta$$

de manera que:

$$\begin{aligned} e_1 e^{I\theta} e_1 &= e_1(\cos\theta + I\, \sin\theta) e_1 \\ &= e_1 \cos\theta\, e_1 + e_1 I \sin\theta\, e_1 \\ &= \cos\theta - I\, \sin\theta \\ &= e^{-I\theta} \end{aligned}$$

i finalment tenim:

$$x' = e^{-I\theta} x = x\, e^{I\theta}$$

que és l'expressió general per rotar un vector x per un angle θ en el pla I.

Àlgebra geomètrica de l'espai

Havent vist tot el que ofereix $\mathcal{G}_2$, anem a estudiar l'àlgebra geomètrica de l'espai tridimensional. La complexitud creix de manera exponencial, però també ho fan la profunditat i riquesa dels conceptes que veurem al llarg d'aquest capítol.

$\mathcal{G}_3$ està generada per:

$$\underbrace{1}_{\text{1 escalar}} \qquad \underbrace{e_1,\, e_2,\, e_3}_{\text{3 vectors}} \qquad \underbrace{e_2e_3,\, e_3e_1,\, e_1e_2}_{\text{3 bivectors}} \qquad \underbrace{I = e_1e_2e_3}_{\text{1 pseudoescalar}}$$

i té dimensió 8. Els bivectors es comporten tots com el pseudoescalar del pla corresponent:

$$(e_2e_3)^2 = (e_3e_1)^2 = (e_1e_2)^2 = -1$$

i cadascun genera rotacions al seu pla, de manera que sempre que ens interessi podem centrar-nos en un únic pla i tractar-lo com $\mathcal{G}_2$. La definició del segon bivector com a e_3e_1 en comptes de e_1e_3 pot semblar lletja i incoherent, però es fa així per tindre una permutació parell dels índexs (recordes el símbol de Levi-Civita?) i que no ens canvïi la orientació: veurem en res que e_1e_3 causa problemes en l'orientació de l'espai però facilita la connexió amb els quaternions.

3.1. Multivectors en tres dimensions

3.1.1. Bivectors

Anem a anomenar els bivectors de la base de $\mathcal{G}_3$:

$$B_1 := e_2e_3, \quad B_2 := e_3e_1, \quad B_3 := e_1e_2$$

o sigui, que el i-èssim bivector de la base està format pel producte exterior e_je_k, per les 3 possibles permutacions parells de (i, j, k). Alternativament, això també es pot escriure:

$$B_i := I\, e_i$$

que reforça un altre cop la idea que el pseudoescalar ens dóna complements ortogonals: B_1 és el pla e_2e_3, que és completament ortogonal a e_1. D'aquestes definicions treiem:

$$B_iB_j = (I\, e_i)(I\, e_j) = (I^2)e_ie_j = -e_ie_j$$

i si expandim el producte geomètric:

$$e_ie_j = e_i \cdot e_j + e_i \wedge e_j = \delta_{ij} + e_i \wedge e_j$$

Aquí ens interessa expressar el producte exterior $e_1 \wedge e_j$ en funció dels bivectors B_k. Afortunadament això està relacionat amb antisimetria i signes de permutacions, així que podem escriure aquesta relació en termes del símbol de Levi-Civita:

$$e_i \wedge e_j = \varepsilon_{ijk} B_k$$

on hem deixat implícit que sumem sobre k. Aleshores tenim:

$$B_i B_j = -\delta_{ij} - \varepsilon_{ijk} B_k$$

Pels que hagueu estudiat mecànica quàntica, aquesta fòrmula és força semblant a la relació que defineix les matrius de Pauli; en un parell d'apartats veurem que, si fem un parell de canvis, efectivament podem relacionar aquesta família de matrius amb els bivectors en 3D.

Fixem-nos en el següent: al multiplicar dos bivectors, obtenim un component escalar (grau 0) i un component bivectorial (grau 2), exactament igual que quan multipliquem vectors. En més dimensions, veurem que aquest producte també tindria components de grau 4.

Aleshores, tenim les següents propietats:

$$B_1^2 = B_2^2 = B_3^2 = -1$$

$$B_1 B_2 B_3 = e_2 e_3 e_3 e_1 e_1 e_2 = +1$$

De què ens sona això? Pels familiaritzats amb camps com robòtica, enginyeria, programació de gràfics... la relació és immediata: els quaternions! Els quaternions i, j, k es defineixen segons les relacions:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ijk = -1$$

Que el producte ijk doni -1 en comptes de 1 ens indica que els quaternions són una **família esquerrana**, és a dir, que la seva multiplicació segueix la regla de la mà esquerra ("índex per cor igual a polze") mentre que els bivectors segueixen la regla de la mà dreta de tota la vida, facilitant així la interpretació geomètrica i enfortint la consistència de $\mathcal{G}_3$. Això fa que no puguem relacionar directament els quaternions amb els bivectors de l'espai directament: si volem definir un isomorfisme entre les dues famílies, cal canviar el signe d'un bivector de la base. Sovint per comoditat es canvia el segon, tenint així $B_2' = e_1 e_3$ tal que:

$$B_1^2 = B_2'^2 = B_3^2 = -1, \quad B_1 B_2' B_3 = -1$$

3.1.2. El pseudoescalar unitat

Exactament igual que els bivectors, els trivectors fan referència a volums orientats, sense fer referència a cap cos geomètric en concret (tot i que es sol imaginar com un paral·lelepípede o el·lipsoide). Tenim un únic element que generi trivectors, el pseudoescalar unitat:

$$I := e_1 e_2 e_3$$

així que qualsevol trivector $a \wedge b \wedge c$ es pot escriure com a:

$$a \wedge b \wedge c = \alpha\, I$$

on podem imaginar que α és el volum del paral·lelepípede amb arestes a, b, c i el seu signe ens diu si $\{a, b, c\}$ és dretana (positiu) o esquerrana (negatiu). La demostració d'això es sol fer en dimensió arbitrària i cal molta gimnàsia de sumatoris i productes exteriors, així que l'ometrem.

Abans hem vist que multiplicar el pseudoescalar 2D per vectors de la base generava rotacions, però aquí tenim justificat sospitar que aplicar el pseudoescalar a e_i ens donarà un bivector ortogonal B_i, fins a orientació. Per tant, provem a multiplicar e_1 per I per les dues bandes a veure què surt:

$$I\, e_1 = e_1 e_2 e_3 = e_2 e_3, \qquad e_1\, I = e_1 e_1 e_2 e_3 = e_2 e_3$$

i similarment per e_2 i e_3, de manera que en tres dimensions I commuta amb tots els vectors. Aquest resultat és molt significatiu: en general, sobre espais de dimensió senar I commuta amb parellvectors i anticommuta amb senarvectors. Per espais de dimensió parell ocórre el que esperaríem: I commuta amb senarvectors i anticommuta amb parellvectors.[1]

Considerem ara el producte del pseudoescalar amb un bivector. Triem genèricament $e_1 \wedge e_2$:

$$I(e_1 \wedge e_2) = e_1 e_2 e_3 e_1 e_2 = -e_3$$

Podem provar això amb diferents vectors, i podem veure un patró: si fem un sol canvi de signe, això és simplement el producte vectorial!

$$a \times b = -I(a \wedge b)$$

Que torna a recordar a com els bivectors són quaternions amb un canvi de signe de per mig. Haver d'arrossegar un signe menys de tant en tant és un preu molt raonable a pagar

[1] "Senarvector" i "parellvector" són termes no-estàndard que m'acabo d'inventar per alleugerar el vocabulari: és molt més compacte i igual d'entenedor dir "parellvector" que no pas "multivectors no necessàriament homogenis on tots els components tenen grau parell", i se'm feia farragós i confús anar dient tota l'estona "multivector parell" i "multivector senar".

per poder generalitzar nocions de producte vectorial i rotacions a un nombre arbitrari de dimensions! I tot això sense obfuscar mai el sentit geomètric de les coses, perquè mai ens hem de parar a pensar en "pseudovectors" i altres objectes que no es comporten bé al canviar de base.

És gràcies a aquesta dualitat que sovint, fora del context d'àlgebres geomètriques, s'anomena "pseudovector" a allò que nosaltres considerem un bivector: el moment angular, el moment de força, la força magnètica de Lorentz... en tres dimensions són tots *duals* a vectors. Això és exactament equivalent a dir que podem identificar tot pla amb el seu vector normal. També està raonat l'ús del terme "pseudoescalar", ja que en dimensió n tot n-vector és una n-fulla que, fins a proporcionalitat, correspon amb I i és per tant dual a un escalar.

Aleshores, com hem sospitat en un parell de punts, multiplicar un multivector M pel pseudoescalar és un tipus de *transformació de dualitat*, que geomètricament correspon a prendre el complement ortogonal, és a dir, la part de l'espai que queda "buida" i no pot expressar M.[2]

3.1.3. Matrius de Pauli

Fent servir el que hem vist a l'apartat de bivectors, tenim que el producte geomètric entre dos vectors de la base és:

$$e_i e_j = e_i \cdot e_j + e_i \wedge e_j = \delta_{ij} + I\, \varepsilon_{ijk}\, e_k$$

Que és casi exactament la fòrmula de les matrius de Pauli σ_k:

$$\sigma_i\, \sigma_j = \delta_{ij}\, I_2 + i\, \varepsilon_{ijk}\, \sigma_k$$

On I_2 denota la matriu identitat 2×2. Explícitament, tenim:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Que realment són (gairebé) la mateixa equació si ens fixem en un parell de coses: δ_{ij} ja ens descriu les entrades de la matriu identitat, i I fa la mateixa funció d'unitat imàginaria $I^2 = -1$ que i.

En el nostre context, generen $\mathcal{G}_3$ al tindre quatre components complexes per un total de vuit graus de llibertat (recordem $\dim \mathcal{G}_3 = 2^3 = 8$). Aquesta formulació té dos punts forts:

[2] Pels que sàpiguen teoria de Hodge això pot sonar semblant a l'operador estrella. Efectivament, podem fer la relació $\star A = A^\dagger I$, on la daga denota el revers de A.

1. Tot i que fer aquests càlculs a mà pot ser farragós, com als ordinadors els hi encanta l'àlgebra lineal (i es pot programar prou fàcilment aritmètica complexa), aquesta formulació facilita en gran mesura els càlculs computacionals i programar àlgebres geomètriques.
2. Generen l'àlgebra geomètrica de l'espai, i sovint s'utilitzen a relativitat i QFT quan vulguem tractar tractar només la part espacial de l'espai temps. Sovint apareixeran de la mà de les matrius de Dirac, que generen l'àlgebra geomètrica de l'espai-temps de Minkowski.

3.2. Projecció de grau i reversió

Anem a definir un operador nou. L'**operador projecció de grau** ens dóna el component únic de grau r d'un multivector A:

$$\begin{aligned} \langle\ \rangle_r : \mathcal{G}_n &\to \mathcal{G}_r \\ A &\mapsto \langle A \rangle_r \end{aligned}$$

Aquest operador és lineal:

$$\langle \lambda\, A + B \rangle_r = \lambda\, \langle A \rangle_r + \langle B \rangle_r$$

i les projeccions successives són independents:

$$\langle \langle A \rangle_r \rangle_s = \langle A \rangle_r\ \delta_{rs}$$

A més, ens permet descomposar tot multivector com a $A = \sum_r \langle A \rangle_r$, i veiem que A és un r-vector sii $A = \langle A \rangle_r$.

Com a detall de notació, denotem el component escalar de la següent manera:

$$\langle A \rangle := \langle A \rangle_0$$

I ens adonem que, al ser el producte escalar simètric, sempre tindrem:

$$\langle AB \rangle = \langle BA \rangle$$

En general, les permutacions cícliques tindran també el mateix component escalar:

$$\langle AB \cdots YZ \rangle = \langle ZA \cdots XY \rangle = \langle YZ \cdots WX \rangle$$

i així successivament.

Tornant a l'operador reversió, recordem que canviava de signe els bivectors però no alterava els escalars i vectors. En tres dimensions, la reversió del pseudoescalar I és:

$$I^\dagger = (e_1 e_2 e_3)^\dagger = e_3 e_2 e_1 = -e_1 e_2 e_3 = -I$$

de manera que si considerem un multivector de $\mathcal{G}_3$ genèric M, que podem expressar:

$$M = \lambda + v + B + \mu\, I$$

el seu revers serà:

$$M^\dagger = \lambda + v - B - \mu\, I$$

En general, es segueix el patró $(+ + - - + + - - \cdots)$.

3.3. Reflexions de bivectors i trivectors

Considerem que tenim un bivector $B = a \wedge b$ i que reflectem ambdós vectors respecte un pla descrit pel vector unitari n ($n^2 = 1$, $n = n^{-1}$). Aleshores tenim:

$$\begin{aligned} B' &= a' \wedge b' \\ &= (-nan) \wedge (-nbn) \\ &= \frac{1}{2}(nannbn - nbnnan) \\ &= n\left(\frac{1}{2}(ab - ba)\right)n \\ &= n(a \wedge b)n \\ &= nBn \end{aligned}$$

Per tant, veiem que un bivector es comporta igual que un vector respecte les reflexions, però canvia el signe: això enforteix encara més el vincle que havíem sospitat amb els psedovectors o vectors axials. Si ara rotem els seus vectors amb un rotor normalitzat R ($RR^\dagger = 1$):

$$\begin{aligned} B' &= (RaR^\dagger) \wedge (RbR^\dagger) \\ &= \frac{1}{2}(RaR^\dagger RbR^\dagger - RbR^\dagger RaR^\dagger) \\ &= \frac{1}{2}(RabR^\dagger - RbaR^\dagger) \\ &= R\left(\frac{1}{2}(ab - ba)\right)R^\dagger \\ &= R(a \wedge b)R^\dagger \\ &= RBR^\dagger \end{aligned}$$

i en aquest cas B es comporta *exactament* com els vectors, sense cap canvi de signe. Anem a mirar ara a intentar reflectar un trivector $T = a \wedge b \wedge c = \alpha\, I$:

$$\begin{aligned} T' &= (-nan) \wedge (-nbn) \wedge (-ncn) \\ &= \langle (-nan)(-nbn)(-ncn) \rangle_3 \\ &= -n \langle abc \rangle_3 n \\ &= -\alpha\, I \\ &= -T \end{aligned}$$

Així que simplement estem canviant d'orientació: passem de trivectors dretans a esquerrans i viceversa. Això és equivalent a dir que les reflexions tenen determinant -1. Per una rotació, com I anticommuta amb tots els elements de $\mathcal{G}_3$:

$$I' = RIR^\dagger = IRR^\dagger = I$$

Així que les rotacions no alteren l'orientació dels trivectors (tenen determinant $+1$).

3.3.1. Composició de rotors

Anem ara a rotar un vector a amb dos rotors consecutius, R_1 i R_2. Aleshores, tenim:

$$a' = R_1 a R_1^\dagger$$

i al fer la segona rotació tenim:

$$a'' = R_2 a' R_2^\dagger = R_2 R_1 a R_1^\dagger R_2^\dagger = (R_2 R_1) a (R_2 R_1)^\dagger$$

Ara podem anomenar $R := R_2 R_1$ per simplificar la notació, així que comprovem si és un nou rotor:

$$(R_2 R_1)(R_2 R_1)^\dagger = R_2 R_1 R_1^\dagger R_2^\dagger = R_2 R_2^\dagger = 1$$

veiem que aleshores la composició de rotors és sempre un nou rotor, de manera que formen un grup (en aquest cas concret, $\mathrm{SO}(3)$). Tornem a veure aleshores que l'àlgebra geomètrica conté no només objectes geomètrics sinò també els operadors que els transformen.

Considerem un cas específic: mantenim R_1 fix, però fem que R_2 representi una volta sencera de 2π radians. Recordant la fòrmula per un rotor que gira un angle determinat:

$$R = R_2 R_1 = e^{-B\,(2\pi)/2} R_1 = e^{-B\pi} R_1 = -R_1$$

(recordem que ara mateix B serveix com a unitat imaginària, $B^2 = -1$). De manera que el rotor canvia de signe al donar una volta, és a dir, que hem de donar dues voltes per tornar a ser el mateix lloc! Això està relacionat amb la idea d'espinor, i és especialment útil per descriure els fermions, que tenen spin $1/2$.

Una altra manera de veure això és amb que, al operar també amb $R^\dagger$, el signe de R canvia com fem la rotació però no el resultat final: per exemple, intentem fer una rotació al pla $B = e_1e_2$ de $\pi/2$:

$$R(\pi/2) = e^{-e_1e_2\,\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e_1e_2$$

i la mateixa rotació però recorreguda en el sentit contrari (de manera que, en comptes de $+\pi/2$ radians, són $-3\pi/2$) queda:

$$R(-3\pi/2) = e^{e_1e_2\,3\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e_1e_2 = -R(\pi/2)$$

i es compleix el que esperàvem.

Generalització i desenvolupament axiomàtic

4.1. Definició axiomàtica

4.1.1. Axiomes de $\mathcal{G}$

Una àlgebra geomètrica és un conjunt $\mathcal{G}$ equipat amb dues operacions, la suma i el producte geomètric, que obeeixen els següents axiomes:

Axioma 1. *$\mathcal{G}$ és un anell, on la identitat additiva és el 0 i la multiplicativa és el 1.*

Resumidament, aquest axioma ens diu que ambdues operacions (i) són associatives, (ii) tenen elements identitat, (iii) cada element té un invers per la suma, (iv) la suma commuta, i (v) la multiplicació es distributiva per ambdues bandes respecte la suma.

Axioma 2. *$\mathcal{G}$ conté un cos $\mathcal{G}_0$, que conté el 0 i el 1 i té característica 0.*

Aquest cos són simplement *els escalars*, i que sigui un cos implica totes les propietats de l'axioma 1, amb les propietats afegides que a $\mathcal{G}_0$ (vi) tots els elements menys el 0 tenen un invers multiplicatiu, i (vii) la multiplicació és commutativa. Característica 0 vol dir que per molt que sumem 1, mai arribarem al 0. Si, per exemple, tinguéssim com a escalars $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, tindríem $1 + 1 = 2 = 0$ i no podríem dividir entre 2; per tant, que $\mathcal{G}_0$ tingui característica 0 fa que puguem dividir per qualsevol escalar menys el 0.

Axioma 3. *$\mathcal{G}$ conté un subconjunt $\mathcal{G}_1$ tancat respecte la suma, on per tot $\lambda \in \mathcal{G}_0$, $v \in \mathcal{G}_1$ es compleix $\lambda\, v = v\, \lambda \in \mathcal{G}_1$.*

Si $\mathcal{G}_0$ eren els escalars, $\mathcal{G}_1$ no són mes que *els vectors* (també *1-vectors* o *multivectors homogenis de grau 1*).

Axioma 4. *El quadrat de qualsevol vector és un escalar.*

Recordant la definició del producte simètric, podem escriure:

$$\frac{1}{2}(uv + vu) = \frac{1}{2}\Big((u+v)^2 - u^2 - v^2\Big)$$

que es verifica expandint l'expressió. Aquest producte el denotarem $u \rfloor v$ o $u \lfloor v$. Per vectors tenim que els productes coincideixen: $u \rfloor v = u \lfloor v = u \cdot v$, però per altres multivectors caldrà definir aquests productes diferents.

Axioma 5. *El producte intern de vectors és no-degenerat.*

Això vol dir que l'únic vector ortogonal a tots els altres és el 0.

Axioma 6. *Si $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_1$, aleshores $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$. Si no, $\mathcal{G}$ és la suma directa de tots els $\mathcal{G}_r$.*

La primera part de l'axioma ens diu simplement que un camp pel seu compte, sense necessitat de vectors, ja pot formar una àlgebra geomètrica. Quan tenim vectors, tot multivector A es pot expressar *únicament* com a la suma dels seus components, $A = \sum_r A_r$. Això vol dir que tot $A \neq 0$ o bé es un r-vector, o bé és de grau mixt.

Axioma 7. *Qualsevol multivector de grau negatiu és idènticament nul.*

Aquest fet no es sol incloure amb els altres axiomes, però és una definició tan fonamental que es mereixia el títol. Pot semblar estrany i arbitrari, però en breu veurem que és útil a l'hora de tractar amb contraccions de multivectors.
Havent definit els axiomes, anem a fer un repàs de notació i terminologia. Considerant $r > 1$:

- Un **r-vector** és un multivector homogeni de grau r. Els denotarem amb lletres llatines majúscules i farem servir un subíndex per especificar el grau: A_r. El conjunt de tots els r vectors sobre un espai determinat es denota $\mathcal{G}_r$.
- Una r-fulla és un multivector que es pot expressar com el producte exterior de r vectors. Les escriurem igual que els r-vectors, però en negreta: $\boldsymbol{A_r} = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r$.
- Un **r-versor** és un producte (geomètric) de r vectors. Les fulles són versors on els vectors són ortogonals, i els rotors són versors invertibles de grau parell (venen de multiplicar un nombre parell de vectors invertibles).

Sovint en comptes de "r-" s'utilitzen prefixes llatins: *bi*vector, *tri*fulla, *quadri*versor...

Havent definit els nostres axiomes i termes bàsics, anem a veure alguns teoremes simples però importants:

4.1.2. Teoremes útils

Teorema 1. *Sigui $\boldsymbol{A_r}$ una r-fulla no nul·la amb $r > 1$. Aleshores, un vector v es pot expressar com a combinació lineal dels factors de $\boldsymbol{A_r}$ sii $v \wedge \boldsymbol{A_r} = 0$.*

Demostració. $v \wedge \boldsymbol{A_r}$ s'anul·la sii els seus factors són linealment dependents. Com els factors de $\boldsymbol{A_r}$ són no-nuls, $v \wedge \boldsymbol{A_r}$ només és 0 quan v és combinació lineal dels factors de $\boldsymbol{A_r}$. ■

D'aquesta manera, podem imaginar que $\boldsymbol{A_r}$ defineix un subespai: l'espai de tots els v tal que $v \wedge \boldsymbol{A_r} = 0$. En cas que $v \wedge \boldsymbol{A_r} \neq 0$, tenim que $v \wedge \boldsymbol{A_r}$ és una $r+1$-fulla que geomètricament fa referència a la suma directa de v i $\boldsymbol{A_r}$. Amb això podem demostrar el següent teorema.

Teorema 2. *Dues r-fulles no nul·les $\boldsymbol{A_r}$ i $\boldsymbol{B_r}$ defineixen el mateix subespai sii cadascuna és un multiple no nul de l'altra.*

Demostració. Relacionem les fulles amb una constant de proporcionalitat i multipliquem a ambdues bandes per un vector arbitrari:

$$\boldsymbol{A_r} = \lambda\, \boldsymbol{B_r} \implies v \wedge \boldsymbol{A_r} = \lambda\, v \wedge \boldsymbol{B_r}$$

així que

$$v \wedge \boldsymbol{A_r} = 0 \iff v \wedge \boldsymbol{B_r} = 0$$

i, com acabem de veure, representen el mateix subespai. ■

Teorema 3. *Sigui $\boldsymbol{A_r}$ una fulla que representa un subespai de $\boldsymbol{A_s}$ estrictament més petit. Aleshores existeix una fulla $\boldsymbol{A_{s-r}}$ tal que*

$$\boldsymbol{A_s} = \boldsymbol{A_r} \wedge \boldsymbol{A_{s-r}}$$

Demostració. Considerem $\boldsymbol{A_r} := a_1 \wedge \cdots \wedge a_r$ i expandim la família de vectors amb $r - s$ vectors nous ortogonals. Ara tenim $a_1 \wedge \cdots \wedge a_s$, que defineix el mateix subespai que $\boldsymbol{A_s}$ i per tant n'és un múltiple no-nul. Podem absorbir l'escalar que els relaciona en els vectors afegits, i escriure

$$\boldsymbol{A_s} = \underbrace{a_1 \wedge \cdots \wedge a_r}_{\boldsymbol{A_r}} \wedge \underbrace{a_{r+1} \wedge \cdots \wedge a_s}_{\boldsymbol{A_{s-r}}}$$

■

Hi ha moltíssims altres teoremes als que podem arribar a partir de la definició axiomàtica de les àlgebres geomètriques, incloent molts resultats evidents amb demostració trivial (com per exemple que una fulla s'anul·la si els seus components són linealment dependents).

4.2. Els productes intern, extern, i geomètric

4.2.1. Productes intern i extern d'un vector i un r-vector

Donats un vector v i un r-vector A_r ($r \geq 1$), anem a buscar el seu producte intern i extern. Per fer-ho, farem ús del següent lema:

Lema 1. *Per un vector v i un r-vector A_r:*

$$A_r \wedge v = (-1)^r\, v \wedge A_r, \qquad A_r \rfloor v = (-1)^{r-1}\, v \rfloor A_r$$

La demostració d'aquest lema es molt feixuga i confusa, així que la saltaré (veure [1]). Aplicant aquest lema podem veure què passa si canviem d'ordre els arguments d'un producte geomètric:

$$v\,A_r = v \rfloor A_r + v \wedge A_r \implies A_r\,v = (-1)^{r-1}\,v \rfloor A_r + (-1)^r\,v \wedge A_r$$

De manera que partim de les següents dues equacions:

$$v\,A_r = v \rfloor A_r + v \wedge A_r \tag{1}$$

$$A_r\,v = (-1)^{r-1} v \rfloor A_r + (-1)^r v \wedge A_r \tag{2}$$

Si ara multipliquem (2) per $(-1)^r$:

$$(-1)^r A_r\,v = (-1)^{2r-1}\,v \rfloor A_r + (-1)^{2r} v \wedge A_r$$

$$(-1)^r A_r\,v = -v \rfloor A_r + v \wedge A_r \tag{3}$$

Per aïllar $v \rfloor A_r$, restem (1) menys (3):

$$v\,A_r - (-1)^r A_r\,v = v \rfloor A_r + v \wedge A_r + v \rfloor A_r - v \wedge A_r = 2\,v \rfloor A_r$$

així que queda:

$$\boxed{v \rfloor A_r := \frac{1}{2}(v\,A_r - (-1)^r A_r\,v)}$$

Fixem-nos que prendre el producte interior d'un r-vector "cap a" un vector dóna un $r-1$-vector. Per això és freqüent dir-li la **contracció de** A_r **per** v. Veiem també que no tindria gaire fer el contrari, $v \lfloor A_r$, perquè ens donaria un $1-r$-vector que s'anul·laria per tot $r > 1$.

Per trobar $v \wedge A_r$, sumem (1) i (3):

$$v\,A_r + (-1)^r A_r\,v = v \rfloor A_r + v \wedge A_r - v \rfloor A_r + v \wedge A_r = 2\,v \wedge A_r$$

i el resultat és:

$$\boxed{v \wedge A_r := \frac{1}{2}(v\,A_r + (-1)^r A_r\,v)}$$

4.2.2. Operadors addicionals

Recordem com hem definit abans l'operador reversió:

$$(a_1 a_2 \cdots a_r)^\dagger := a_r \cdots a_2 a_1$$

Imaginem que tenim un r-vector qualsevol $A_r = a_1 \cdots a_r$. Per revertir una seqüència de r elements hem de fer $\binom{r}{2}$ canvis, cadascun dels quals contribueix un canvi de signe. Simplificant el binomi:

$$\binom{r}{2} = \frac{r!}{2(r-2)!} = \frac{r(r-1)}{2}$$

així que queda:

$$A_r^\dagger = (-1)^{r(r-1)/2} A_r$$

Considerem ara el revers del component escalar del producte geomètric de dos r-vectors:

$$\langle A_r B_r \rangle = \langle A_r B_r \rangle^\dagger = \left\langle B_r^\dagger A_r^\dagger \right\rangle = (-1)^{r(r-1)} \langle B_r A_r \rangle = \langle B_r A_r \rangle$$

Això ens diu que, en general:

$$\langle AB \rangle = \langle BA \rangle$$

Que es pot generalitzar a qualsevol permutació cíclica de multivectors:

$$\langle AB \cdots YZ \rangle = \langle BC \cdots YZA \rangle = \cdots = \langle ZABC \cdots XY \rangle$$

Aquí és natural definir una nova operació: el **producte escalar entre multivectors**. Donats qualssevol dos multivectors A, B, definim el seu producte escalar com a la següent operació simètrica:

$$\boxed{A * B := \langle AB \rangle}$$

A més, definim de pas el **producte commutador**:

$$\boxed{A \times B := \frac{1}{2}(AB - BA)}$$

Aquesta operació és idèntica al commutador de matrius o operadors usual, però amb l'afegit factor d'un mig. Com és d'esperar, el producte commutador satisfà les propietats usuals d'un commutador qualsevol:

- Antisimetria

  $$A \times A = 0 \iff A \times B = -B \times A$$

  La doble implicació només ocórre sobre cossos de característica diferent a 2, però pel segon axioma tenim que la característica del nostre cos és 0.

- La identitat de Jacobi:

  $$A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = 0$$

  Que es demostra fàcilment expandint els productes.

Si considerem un bivector B, el seu commutador amb un vector v ve donat per

$$B \times v = \frac{1}{2}(Bv - vB) = B \rfloor v$$

Que és un nou vector. En general això es compleix pel commutador d'un bivector amb qualsevol r-vector. Per verificar-ho, prenem el revers del resultat:

$$\begin{aligned}(B \times A_r)^\dagger &= \frac{1}{2}(B\,A_r - A_r\,B)^\dagger \\ &= \frac{1}{2}(-A_r^\dagger\,B + B\,A_r^\dagger) \\ &= \frac{1}{2}\Big((-1)^{r(r-1)/2}B\,A_r - (-1)^{r(r-1)/2}A_r\,B\Big) \\ &= (-1)^{r(r-1)2}\,B \times A_r\end{aligned}$$

Això vol dir que $B \times A_r$ i A_r es comporten igual respecte la reversió, de manera que, igual que hem vist amb els vectors, aquest commutador tindrà grau homogeni r:

$$B \times A_r = \langle B \times A_r \rangle_r$$

El qual implica a més que el commutador de qualssevol dos bivectors donarà un nou bivector.[1]

Ja posats anem a definir **les contraccions i el producte exterior entre multivectors**. Donats dos multivectors $A = \sum_r A_r$ i $B = \sum_s B_s$:

$$\boxed{A \rfloor B := \sum_{r,s} \langle A_r B_s \rangle_{s-r}}$$

$$\boxed{A \lfloor B := \sum_{r,s} \langle A_r B_s \rangle_{r-s}}$$

$$\boxed{A \wedge B := \sum_{r,s} \langle A_r B_s \rangle_{r+s}}$$

Aquestes definicions tenen algunes conseqüències immediates:

- Al contraure dos r-vectors:

$$A_r \rfloor B_r = A_r \lfloor B_r = \langle A_r B_r \rangle$$

- Si $r > s$, aleshores:

$$A_r \rfloor B_s = B_s \lfloor A_r = 0$$

  ja que el resultat tindria grau $s - r < 0$, i els multivectors de grau negatiu desapareixen.

[1] Podem començar a veure aquí una relació amb àlgebres de Lie: tenim un clàudator $[\cdot,\cdot] = \cdot \times \cdot$ tancat i que satisfà tant $[x, x] = 0$ com la identitat de Jacobi.

- El terme de major grau en $A_r B_s$ és sempre $A_r \wedge B_s$.
- Similarment, el terme no-nul de menor grau és $A_r \rfloor B_s$ si $s \geq r$, o $A_r \lfloor B_s$ si $r \geq s$.
- El producte geomètric d'un vector amb qualsevol altre multivector ve donat per la suma dels productes intern (grau $r-1$) i extern (grau $r+1$). En qualsevol altre cas hi han termes creuats, amb graus intermitjos des de $|r-s|$ fins a $r+s$.

4.3. Dualitat, sistemes, components

4.3.1. El pseudoescalar

Per definició, una r-fulla ve donada pel producte exterior no nul de r vectors. En un determinat espai vectorial, la r-fulla de major grau és (fins a proporcionalitat) única.

Donada una àlgebra geomètrica $\mathcal{G}_n$, anomenem aquesta fulla el **pseudoescalar unitari**, denotat I i definit:

$$\boxed{I := e_1 \wedge \cdots \wedge e_n}$$

Diem que és *unitari* perquè sempre, per qualsevol espai vectorial, estarà normalitzat:

$$|I^2| = 1$$

on el signe de I^2 dependrà de la dimensió i mètrica de l'espai en qüestió. És pura casualitat que en els tres espais que estudiarem aquí (pla euclidi, espai euclidi, i espai-temps de Minkowski) tinguem $I^2 = -1$.

Aquest pseudoescalar defineix per tant també una orientació: diem que tota n-fulla té orientació positiva o negativa segons si el seu signe coincideix amb el de I o no, respectivament. Per canviar la orientació d'una fulla només cal intercanviar dos vectors de lloc (o, en general, fer qualsevol permutació senar).

Vàrem veure que operar I amb qualsevol r-vector A_r retorna un $n-r$-vector $I\,A_r$, que és el que s'anomena una **transformació de dualitat**. El nou $n-r$-vector representa el *complement ortogonal* de A_r, és a dir, tot l'espai format per vectors no continguts dins de A_r.

Tota r-fulla representa el pseudoescalar del seu subespai corresponent: per exemple, en tres dimensions podem considerar el bivector $e_1 e_2$ com el pseudoescalar que defineix orientació i rotacions al pla $e_1 e_2$.

I sempre commuta amb tots els multivectors de grau parell. Si l'espai és de dimensió senar (resp. parell), I commuta (resp. anticommuta) amb tots els vectors i altres elements de grau senar. Podem resumir això en una sola fòrmula:

$$I\,A_r = (-1)^{r(n-1)} A_r\,I$$

4.3.2. Sistemes

Anomenem un **sistema** (en anglès *frame*) a qualsevol conjunt de vectors linealment independents que formin una base pels vectors d'una àlgebra geomètrica. Donat un espai n-dimensional, denotem un sistema qualsevol:

$$\{e_k\} = e_1, e_2, \cdots, e_n$$

Notem que en general no té per què ser ortonormal. A més, al igual que tota base, implica expressar els vectors en unes coordenades úniques al sistema.

L'element de volum associat al sistema $\{e_k\}$ ve donat per:

$$E_n = e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$$

Veiem que és una n-fulla, i que és un múltiple (no-nul, al ser $\{e_k\}$ independents) del pseudoescalar I_n.

A tot sistema hi associem un **sistema recíproc** $\{e^k\}$, definit segons:

$$e^i \cdot e_j = \delta^i_j$$

Que seria anàleg a la base dual. Utilitzem el superíndex per ressaltar el seu comportament covariant. Alternativament podem definir:

$$e^i = (-1)^{i-1}(e_1 \wedge \cdots \wedge \check{e}_i \wedge \cdots \wedge e_n)E_n^{-1}$$

On el *check* ($\check{}$) indica una omissió. La interpretació geomètrica d'aquesta fòrmula és immediata: el producte exterior dels vectors $e_1, \cdots, \check{e}_i, \cdots, e_n$ defineix un espai $n-1$-dimensional. Aplicar el pseudoescalar ens dóna el complement ortogonal a aquest subespai, que en aquest cas concret és un vector ortogonal a tots els $\{e_k\}$ mentre $k \neq i$, que és exactament la condició que defineix el sistema recíproc.

Això només garanteix ortogonalitat, així que encara cal verificar que estigui normalitzat. Prenent sense pèrdua de generalitat $i = 1$ tenim:

$$e^1 \cdot e_1 = e_1 \cdot e^1 = e_1 \cdot (e_2 \wedge \cdots \wedge e_n\,E_n^{-1}) = (e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n)E_n^{-1} = 1$$

Aleshores, tot vector v té unes coordenades $\{v^k\}$ en el sistema $\{e_k\}$, i similarment té $\{v_k\}$ en $\{e^k\}$. Usant notació d'Einstein:

$$v = v^i e_i = v_i e^i$$

Aleshores, prendre el producte intern entre v i un (co)vector del sistema no fa més que projectar v i donar-nos la coordenada corresponent. Explícitament:

$$v \cdot e_i = (v_j e^j) \cdot e_i = v_j (e^j \cdot e_i) = v_j \, \delta_i^j = v_i$$

$$v \cdot e^i = (v^j e_j) \cdot e^i = v^j (e_j \cdot e^i) = v^j \, \delta_j^i = v^i$$

Si simplement substituïm aquests resultats en l'expressió original per v, tenim:

$$v = v \cdot e^i \, e_i = v \cdot e_i \, e^i$$

que en general es compleix per qualsevol vector contingut en l'espai generat per $\{e_k\}$. Això s'extrapola directament a qualsevol multivector. Per exemple, si considerem un bivector $a \wedge b$ tenim:

$$e^i \, e_i \rfloor \, (a \wedge b) = e^i (e_i \cdot a) b - e^i (e_i \cdot b) a = e^i \, a_i \, b - e^i \, b_i \, a = ab - ba = 2 \, a \wedge b$$

Àlgebra geomètrica de l'espai-temps

Els espais euclidis de dues i tres dimensions eren només preliminars per familiaritzar-nos amb conceptes i notació: l'espai-temps de Minkowski és la primera àlgebra geomètrica que veu la majoria de gent que realment fa brillar les propietats tan úniques d'aquesta teoria. Aquesta àlgebra sovint s'anomena **STA** (de l'anglès *spacetime algebra*) i es denota $\mathcal{G}(1,3)$ o similar.

Com és usual, partirem d'un espai vectorial de quatre dimensions on la zero-èssima dimensió correspon al temps. Als índexs per components de vectors les lletres llatines faran referència a només l'espai (1-3) i les gregues a tot l'espai temps (0-3). Utilitzarem també el conveni $c = 1$ per alleugerar la notació.

Partim de la mètrica $(+---)$ i una base ortonormal $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. Utilitzar γ pels vectors de la base s'ha heretat de teoria de Dirac i és el conveni més comú amb diferència en STA. Aquesta mètrica satisfà:

$$\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+---)$$

o equivalentment:

$$\gamma_0^2 = 1, \quad \gamma_i \cdot \gamma_j = \delta_{ij}, \quad \gamma_0 \cdot \gamma_i = 0$$

i podem expressar un esdeveniment (que recordem, no és més que un vector de l'espai-temps) x com la suma dels seus components:

$$x = x^\mu \gamma_\mu = t\gamma_0 + x^i \gamma_i = t\gamma_0 + \boldsymbol{x}$$

Aleshores, $\mathcal{G}(1,3)$ té dimensió $2^4 = 16$ i està generada per:

$$\underbrace{1}_{\text{1 escalar}} \quad \underbrace{\{\gamma_\mu\}}_{\text{4 vectors}} \quad \underbrace{\{\gamma_\mu \wedge \gamma_\mu\}}_{\text{6 bivectors}} \quad \underbrace{\{I\,\gamma_\mu\}}_{\text{4 trivectors}} \quad \underbrace{I}_{\text{1 pseudoescalar}}$$

S'ha d'anar amb cura amb el vocabulari: "quadrivector" pot fer referència o bé a un element de $\mathcal{G}(1,3)$ de grau 4 o bé un vector amb quatre components (com el quadrimoment o la quadrivelocitat). Aquí, sempre que mencionem "quadrivectors" estarem parlant de multivectors homogenis de grau 4.

Veiem també que els nostres vectors generadors satisfan:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$$

que és exactament la relació que defineix les matrius de Dirac $\{\gamma^\mu\}$! És per això que es sol utilitzar gamma per denotar els vectors de la base. Això és anàleg a quan en tres dimensions ens vàrem trobar amb les matrius de Pauli: les matrius de Dirac amb els seus 32 graus de llibertat formen una representació de STA.

5.1. Objectes de grau superior

5.1.1. Bivectors temporals i espacials

Abans que res, veiem que podem dividir els bivectors en dues categories: aquells que **contenen un component temporal** ($\gamma_0\gamma_i$), i aquells que són **purament espacials** ($\gamma_i\gamma_j$). Els anomenarem bivectors **temporals** (*timelike* i **espacials** (*spacelike*), respectivament. Veiem que hi han 3 de cada tipus.

Un hauria d'esperar que els bivectors espacials generen rotacions sobre el seu pla. Per verificar-ho, prenem el quadrat d'un bivector espacial qualsevol:

$$(\gamma_i\gamma_j)^2 = \gamma_i\gamma_j\gamma_i\gamma_j = -1$$

així que efectivament actúa com a unitat imaginària i generador de rotacions sobre el pla $\gamma_i\gamma_j$. Té sentit que al passar a l'espai-temps puguem seguir tractant l'espai pel seu propi compte. I si provem a fer el quadrat d'un bivector temporal?

$$(\gamma_0\gamma_i)^2 = \gamma_0\gamma_i\gamma_0\gamma_i = +1$$

En comptes de ser anàlegs a la unitat imaginària $i^2 = -1$, els bivectors temporals es comporten com la unitat hiperbòlica $j^2 = 1$ (el nom sol ja ens fa una mica de spoiler...). Per tant és d'esperar que ens generin rotacions hiperbòliques; recordem que hem tret la fòrmula per rotacions euclideanes a partir de la sèrie de Taylor de l'exponencial, així que si expandim l'exponencial d'un bivector temporal $\alpha\,\gamma_0\gamma_i$ tenim:

$$\begin{aligned} e^{\alpha\,\gamma_0\gamma_i} &= 1 + \alpha\,\gamma_0\gamma_i + \frac{(\alpha\,\gamma_0\gamma_i)^2}{2} + \frac{(\alpha\,\gamma_0\gamma_i)^3}{3!} + \frac{(\alpha\,\gamma_0\gamma_i)^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4!} + \cdots + \alpha\,\gamma_0\gamma_i + \frac{\alpha\,\gamma_0\gamma_i}{3!} + \cdots \\ &= \cosh(\alpha) + \sinh\alpha\,\gamma_0\gamma_i \end{aligned}$$

que efectivament és una rotació hiperbòlica! Això ens serà especialment útil quan vulguem fer transformacions de Lorentz, que sabem que podem expressar com a rotacions hiperbòliques.

Fixem-nos també en que hem escrit $\gamma_0\gamma_i$, però com als diagrames es sol dibuixar l'eix temporal a la vertical ens serà molt més còmode escriure $\gamma_i\gamma_0$ per ser consistents amb l'orientació.

5.1.2. El pseudoescalar en STA

En l'espai-temps, definim el pseudoescalar com a:

$$I = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

Recordem també que com estem en un espai de dimensió parell el pseudoescalar anticommutarà amb vectors i trivectors, i commutarà amb bivectors.
amb revers:

$$\tilde{I} = \gamma_3\gamma_2\gamma_1\gamma_0 = I$$

Veiem que en STA utilitzem la tilde ($\tilde{}$) en comptes de la daga (†) per denotar el revers. Això es deu a que en teoria de Dirac hi han diferents tipus de reversions/conjugacions/adjunts; l'important és que la que farem servir nosaltres, denotada amb la tilde, és Lorentz invariant.

Tornant als bivectors, un podria deduïr que el pseudoescalar ens relaciona els bivectors temporals i espacials (ja que al partir d'un multivector de grau 2 ens retornarà un altre de grau $4-2=2$). Efectivament, si prenem per exemple $\gamma_1\gamma_0$:

$$I\gamma_1\gamma_0 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_1\gamma_0 = -\gamma_2\gamma_3$$

mentre que els vectors estan relacionats amb els trivectors (i viceversa):

$$I\gamma_0 = \gamma_0\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

5.2. Relativitat especial en STA

5.2.1. Transformacions de Lorentz

Considerem un *boost* en l'eix γ_1 per un esdeveniment (t, x, y, z). Aleshores, com no fem cap canvi als eixos γ_2 i γ_3, tenim:

$$t\gamma_0 + x\gamma_1 = t'\gamma_0' + x'\gamma_1'$$

i la transformació de Lorentz corresponent ve donada per:

$$t' = \gamma(t - vx), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z$$

on v és la velocitat del nou sistema i $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ és el factor Lorentz usual.

Intentem relacionar el fet que una transformació de Lorentz és una rotació hiperbòlica amb com hem definit els rotors al capítol 2. Recordem que una rotació euclideana per un angle θ ve donada per:

$$a \mapsto Ra\tilde{R}, \quad R = e^{\theta B/2}, \quad R\tilde{R} = 1$$

on B és un bivector unitari que descriu el pla de rotació. D'aquesta manera γ_0' i γ_1' no seran més que les rotacions hiperbòliques dels vectors corresponents. Aleshores, segons el que hem vist a l'apartat de bivectors de STA, el que té mes sentit és fer el mateix però substituïnt B per un bivector temporal $B_i = \gamma_i\gamma_0$ (tal que $B_i^2 = +1$), i l'angle θ per una rapiditat ψ. Per un boost en l'eix γ_1:

$$R = e^{\psi\,\gamma_1\gamma_0/2} = \cosh\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\psi}{2}\right)\gamma_1\gamma_0$$

amb revers:

$$\tilde{R} = e^{-\psi\,\gamma_1\gamma_0/2} = \cosh\left(\frac{\psi}{2}\right) - \sinh\left(\frac{\psi}{2}\right)\gamma_1\gamma_0$$

Mirem ara com actúen sobre els vectors de la base γ_0 i γ_1:

$$\begin{aligned}
\gamma_0' &= R\gamma_0\tilde{R} = e^{\psi\,\gamma_1\gamma_0/2}\gamma_0 e^{-\psi\,\gamma_1\gamma_0/2} \\
&= \left(\cosh\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\psi}{2}\right)\,\gamma_1\gamma_0\right)\,\gamma_0\,\left(\cosh\left(\frac{\psi}{2}\right) - \sinh\left(\frac{\psi}{2}\right)\,\gamma_1\gamma_0\right) \\
&\;\;\vdots \\
&= \cosh(\psi)\,\gamma_0 + \sinh(\psi)\,\gamma_1
\end{aligned}$$

El procediment per γ_1 és similar, i s'arriba a:

$$\gamma_1' = R\gamma_1\tilde{R} = \sinh(\psi)\,\gamma_0 + \cosh(\psi)\,\gamma_1$$

Com l'esdeveniment és invariant podem escriure:

$$t\,\gamma_0 + x\,\gamma_1 = t'\gamma_0 + x'\gamma_1 = t'\Big(\cosh(\psi)\,\gamma_0 + \sinh(\psi)\,\gamma_1\Big) + x'\Big(\sinh(\psi)\,\gamma_0 + \cosh(\psi)\,\gamma_1\Big)$$

que no és més que un sistema d'equacions lineal (ψ és un paràmetre constant, les incògnites són t' i x') dos per dos que es pot resoldre molt fàcilment en forma matricial, donant:

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\psi) & -\sinh(\psi) \\ -\sinh(\psi) & \cosh(\psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}$$

que és la fòrmula per la rotació hiperbòlica d'un vector i efectivament correspon a una transformació de Lorentz! Desenvolupant l'expressió podem substituïr $\cosh(\psi) = \gamma$ i $\sinh(\psi) = \gamma v$ per recuperar la forma més "estàndard":

$$\begin{aligned}
t' &= \gamma(t - v\,x) \\
x' &= \gamma(x - v\,t) \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}$$

Així que utilitzar STA simplifica en gran part les transformacions de Lorentz: no cal enrecordar-se de les fòrmules ni arrossegar matrius 4×4, només fer rotacions igual que les del pla euclidi! També implica que per fer transformacions successives només cal composar (multiplicar) rotors.

5.2.2. Sistemes de referència relatius

Vector relatiu

Considerem una posició en funció del temps propi, $x(\tau)$. Aleshores la velocitat és:

$$v = \frac{dx}{d\tau} = \dot{x}$$

com els observadors sempre segueixen trajectòries tipus temps (en la nostra mètrica això implica $v > 0$), sempre la podem normalitzar:

$$v^2 = 1$$

Anem a definir-li un sistema de referència en repòs. Com la trajectòria pot estar corbada l'haurem de definir localment, per un instant de temps infinitesimal. Aleshores tenim $e_0 = v$ i els altres $\{e_i\}$ hauran de ser ortogonals. Això vol dir que un esdeveniment x es pot descomposar:

$$x = x^\mu e_\mu = t\, e_0 + x^i e_i$$

on tenim coordenades:

$$t = x \cdot e_0 = x \cdot v \qquad x^i = x \cdot e^i$$

de manera que podem escriure:

$$x^i e_i = x^\mu e_\mu - t\, e_0 = x - (x \cdot v)v = (x \wedge v)v$$

on per l'últim pas només cal expandir el producte intern en termes del geomètric i cancellar termes. Anomenem aquest bivector el **vector relatiu**, denotat:

$$\boldsymbol{x} := x \wedge v$$

a partir del qual podem escriure el producte geomètric xv com a:

$$xv = x \cdot v + x \wedge v = t + \boldsymbol{x}$$

que en torn ens permet reescriure l'interval:

$$\begin{aligned} x^2 &= xx = xvvx \\ &= (x \cdot v + x \wedge v)(v \cdot x + v \wedge x) \\ &= (t + \boldsymbol{x})(t - \boldsymbol{x}) \\ &= t^2 - \boldsymbol{x}^2 \end{aligned}$$

que és el mateix interval que ja descriu la nostra mètrica. Això vol dir que, sense necessitat de condicions afegides ni definicions addicionals hem pogut arribar a que tot sistema de referència momentàniament en repòs localment satisfà la nostra mètrica - un dels pilars fonamentals de la relativitat general.

Velocitat relativa

Considerem un observador que viatja a velocitat *constant* v i vol mesurar la velocitat relativa d'un sistema amb velocitat pròpia $u = \dot{x}(\tau)$ tal que $u^2 = 1$. Aleshores tenim:

$$uv = \frac{d}{d\tau}(x(\tau)v) = \frac{d}{d\tau}(t + \boldsymbol{x}) = u \cdot v + u \wedge v$$

on $t + \boldsymbol{x}$, com acabem de veure a l'apartat anterior, no és més que x segons el sistema v (recordem que $\boldsymbol{x}$ és un bivector). Comparant coeficients pels termes de grau 0 i 2:

$$\frac{dt}{d\tau} = u \cdot v, \quad \frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = u \wedge v$$

i la velocitat relativa $\boldsymbol{u}$ mesurada desde v ve donada per:

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{u \wedge v}{u \cdot v}$$

L'antisimetria entre dos observadors apareix de forma natural: té sentit que la velocitat de v mesurada desde u sigui la mateixa que u vista desde v però amb el signe canviat. A més, gràcies a la normalització de u, aquest terme sempre estarà entre -1 i 1 (que recordem en les nostres unitats corresponen a $-c$ i c respectivament).

Suma de velocitats

Considerem ara que tenim dues trajectòries colineals i volem estudiar les velocitats relatives. Imaginem que el moviment es troba en l'eix γ_1, i que les velocitats venen donades per:

$$v_1 = e^{\psi_1 \gamma_1\gamma_0/2}\gamma_0 e^{\psi_1 \gamma_1\gamma_0/2} = e^{\psi_1 \gamma_1\gamma_0}\gamma_0$$

i, similarment:

$$v_2 = e^{\psi_2 \gamma_1\gamma_0}\gamma_0$$

La velocitat relativa per tant segueix l'equació de l'apartat anterior:

$$\frac{v_1 \wedge v_2}{v_1 \cdot v_2} = \frac{\langle v_1 v_2 \rangle_2}{\langle v_1 v_2 \rangle}$$

que expandint i simplificant esdevé:

$$\frac{\sinh(\psi_1 - \psi_2)\,\gamma_1\gamma_0}{\cosh(\psi_1 - \psi_2)} = \tanh(\psi_1 - \psi_2)\,\gamma_1\gamma_0$$

així que la velocitat relativa que mesuren ambdós observadors és aleshores:

$$\tanh(\psi_1 - \psi_2) = \frac{\tanh(\psi_1) - \tanh(\psi_2)}{1 - \tanh(\psi_1)\tanh(\psi_2)} = \frac{u_1 - u_2}{1 - u_1 u_2}$$

on u_1 i u_2 són les velocitats escalars de les trajectòries.

Conclusió

Tot i haver vist una part molt, molt limitada de les propietats i aplicacions de les àlgebres geomètriques, espero que aquest paperillo sigui una bona primera introducció per gent que no coneixi el tema. Personalment he après molt fent la recerca i estudiant el tema: casi tota la física està expressada amb les mateixes eines matemàtiques, així que reformular i unificar tot el teu llenguatge matemàtic ha estat un repte molt satisfactori i que m'ha donat molt per pensar.

No descarto fer un altre paperillo aprofundint en altres aplicacions d'àlgebra geomètrica: càlcul geomètric, electrodinàmica, teoria de Dirac, relativitat general (teoria gauge de la gravetat)... També és un tema que es podria adaptar amb prou facilitat a una xerrada o a una sessió magistral del Club de Física.

Bibliografia

[1] Eric Chisolm. Geometric algebra. 2012.

[2] Chris Doran and Anthony Lasenby. *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge University Press, 2003.

[3] David Hestenes and Garret Sobczyk. *Clifford Algebra to Geometric Calculus*. Springer Netherlands, 1984.